Marco Barlotti

Appunti di

MATEMATICA

per l'insegnamento di "Matematica e Statistica"
del corso di laurea triennale in Scienze Naturali

Vers. 3.1
Anno Accademico 2009-2010

In copertina un disegno originale (© Disney) di Luciano Gatto.

PERCHE' QUESTI APPUNTI, E COME USARLI

(Prefazione alla vers. 3.1)

Questi appunti vogliono costituire un supporto scritto alle lezioni che tengo per il modulo di Matematica dell'insegnamento di "Matematica e Statistica" per il Corso di Laurea triennale in Scienze Naturali presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali all'Università di Firenze. Essi nascono come "spontanea" evoluzione degli appunti di "Istituzioni di Matematica" utilizzati fino all'Anno Accademico 2007-2008.

Penso che tale insegnamento debba proporsi essenzialmente tre scopi :

– fornire una preparazione di base nella materia a livello universitario ;

– presentare i concetti matematici fondamentali mantenendo un "punto di vista superiore" rispetto alla Scuola Secondaria ;

– mettere i futuri laureati nelle condizioni di usare alcuni specifici strumenti di calcolo.

Questa impostazione comporta una certa ampiezza nell'arco degli argomenti trattati e, di conseguenza, la rinuncia allo sviluppo di procedimenti avanzati di calcolo. Sono però convinto che una buona preparazione di base metta in condizione di apprendere, se necessario, tecniche specialistiche; mentre, d'altro lato, la padronanza di molti strumenti di calcolo non garantisce di per sé una corretta visione della materia.

Forse al lettore sembrerà di incontrare troppe definizioni. Per convincersi della loro necessità, consideri che la Matematica è strumento fondamentale per descrivere la realtà (fisica, biologica, economica, ecc.); una buona descrizione è necessariamente anche un'accurata tassonomia delle possibili situazioni, che per essere correttamente formalizzata ha bisogno di un linguaggio assolutamente preciso.

Nell'usare questi appunti, lo studente deve tenere presente che, per la loro stessa natura di testo scritto, essi non sono la stessa cosa delle lezioni tenute in aula. Ad esempio, la trattazione è talvolta più formale (e quindi più "pesante") rispetto a quanto consente l'immediatezza dell'esposizione orale, dove ci si può "lasciare andare" all'uso di qualche notazione non del tutto ortodossa.

Inoltre, rispetto al programma effettivamente svolto a lezione, questi appunti comprendono alcune dimostrazioni in più ([1]) ma molti esercizi in meno (e quelli riportati non sono, in generale, svolti). Le dimostrazioni in più vogliono consentire allo studente interessato qualche approfondimento e servire comunque come riferimento per eventuali consultazioni future.

[1] Per la preparazione all'esame lo studente è invitato a fare riferimento al programmma consuntivo del corso disponibile su Internet all'URL

http://www.dmd.unifi.it/marcobar/SNat/Programma.html

oppure

http://marcobar.outducks.org/SNat/Programma.html

Alla carenza di esercizi dedicati all'Analisi Matematica il lettore può ovviare utilizzando qualcuno degli appositi testi reperibili in commercio (si veda anche, al termine della bibliografia posta dopo questa introduzione, l'elenco dei libri consigliati). Dovrebbero invece essere sufficienti per un'adeguata preparazione sull'argomento gli esercizi sui sistemi lineari riportati nel capitolo 14, fra l'altro in buona parte svolti nei dettagli e comunque corredati delle soluzioni.

Si noti che alcuni degli esercizi proposti sono contrassegnati con un asterisco fra parentesi quadre ([*]) : si tratta di esercizi "di approfondimento", generalmente più difficili degli altri, che **non** è necessario saper risolvere per superare l'esame, anche con un buon voto.

Molti studenti affrontano questo corso di lezioni col timore di possedere una preparazione insufficiente a causa del tipo di Scuola Secondaria frequentato o per altri motivi. Raramente tale timore è giustificato: infatti, sia a causa del carattere "istituzionale" di questo corso sia per i criteri con cui esso viene impostato, i prerequisiti richiesti sono minimi; per tranquillizzare il lettore è comunque opportuno precisarli.

NOZIONI SUPPOSTE NOTE DAGLI STUDI PRECEDENTI

L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali; le operazioni di "somma" e "prodotto", la relazione di "minore o uguale", sottrazione, divisione, divisione euclidea, elevamento a potenza in $\mathbb{N}$, in $\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{Q}$; principali proprietà di tali operazioni e relazioni. La scomposizione in fattori primi dei numeri naturali; massimo comun divisore e minimo comune multiplo. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali verrà introdotto durante il corso; tuttavia, a quel punto sarà data per acquisita (dai precedenti studi nella Scuola Secondaria) una certa capacità di calcolo con i numeri reali, e in particolare con i radicali.

Polinomi, prodotti notevoli di polinomi e alcuni casi di scomposizione di polinomi; teorema di Ruffini. Equazioni algebriche; risoluzione delle equazioni algebriche di 1^0 e 2^0 grado ; risoluzione di quelle equazioni algebriche di grado superiore al 2^0 che possono essere affrontate mediante la scomposizione dei polinomi e il teorema di Ruffini. Disequazioni intere e fratte di 1^0 e 2^0 grado. Disequazioni di grado superiore al 2^0 che possono essere affrontate mediante la scomposizione dei polinomi e il teorema di Ruffini.

Nozioni essenziali di geometria piana: rette, angoli, triangoli; segmenti commensurabili; misura dei segmenti commensurabili con l'unità di misura fissata; le isometrie del piano.

Trigonometria piana: definizione delle funzioni **sin**, **cos**, **tg**, **cotg** ; le due relazioni fondamentali: $\mathbf{sin}^2(\alpha) + \mathbf{cos}^2(\alpha) = 1$, $\mathbf{tg}(\alpha) = \dfrac{\mathbf{sin}(\alpha)}{\mathbf{cos}(\alpha)}$; le "formule di addizione" per **sin** e **cos** ; il "teorema dei seni" e il "teorema del coseno".

Per i fatti essenziali sulle isometrie del piano e le nozioni utili di trigonometria piana il lettore può utilmente consultare [1], distribuito in rete assieme a questi appunti.

È inevitabile la presenza in questi appunti di errori materiali; inoltre, per quanto mi sia sforzato di conciliare il rigore con la chiarezza, alcuni brani del testo possono risultare poco comprensibili. Sarò grato a tutti coloro, e specialmente agli studenti, che vorranno segnalarmi qualunque problema, dai più banali errori di stompa alle oscurità nell'esposizione.

Firenze, 29.10.2009

Marco Barlotti

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Barlotti
Richiami su isometrie, angoli orientati e trigonometria piana
http://www.dmd.unifi.it/marcobar/SNat/Richiami.pdf
http://marcobar.outducks.org/SNat/Richiami.pdf

[2] G. C. Barozzi, C. Corradi
Matematica Generale per le scienze economiche
il Mulino, Milano (1997)

[3] G. C. Barozzi, C. Corradi
Matematica Generale per le scienze economiche: Esercizi
il Mulino, Milano (1998)

[4] G. Choquet
L'enseignement de la Géométrie
Hermann, Paris (1964)

[5] G. Devoto, G. C. Oli
Il dizionario della lingua italiana
Le Monnier, Firenze (1990)

[6] E. Giusti
Esercizi e complementi di analisi matematica
Bollati Boringhieri, Torino (1991)

[7] P. R. Halmos
Naive set theory
Van Nostrand, Princeton NJ (1966)

[8] P. R. Halmos
Teoria elementare degli insiemi
Feltrinelli, Milano (1970)

[9] D. Hilbert
Fondamenti della Geometria
Feltrinelli, Milano (1970)

[10] P. Marcellini, C. Sbordone
Esercitazioni di Matematica
Liguori, Napoli (1988)

[11] G. Peano
Aritmetica generale e algebra elementare
Paravia, Torino (1902)

[12] G. Prodi
Istituzioni di Matematica
McGraw – Hill, Milano (1994)

[13] R. Scozzafava
Matematica di base
Masson, Milano (1992)

[14] A. Spinelli, L. Scaglianti
Guida all'esame di Matematica generale
CEDAM, Padova (1984)

A chi preferisca studiare su altri libri, segnalo come abbastanza omogenei al programma che svolgo (in ordine decrescente di omogeneità) [12] , [13] e [2] .

Fra i libri di esercizi che conosco, credo di poter consigliare (in ordine crescente di difficoltà) [14] , [3] , [10] e [6] .

Per approfondimenti, sono ottimi testi [4] , [8] e [9] .

SOMMARIO

18. - Derivate

19. - Estremi locali e teoremi connessi

20. - Le regole di De L’Hôpital

21. - Convessità

22. - Asintoti

23. - Studio di una funzione

24. - Primitive

25. - Elementi di calcolo integrale

26. - Equazioni differenziali

1.- INTRODUZIONE

1.1 - L'impostazione assiomatica.

Ogni teoria matematica si sviluppa mediante definizioni e teoremi su cui poggiano a cascata altre definizioni e altri teoremi. Ogni definizione spiega il significato di una parola, o di un gruppo di parole, mediante altre parole. Ma è possibile definire tutte le parole? O, forse, alcuni termini matematici possono essere definiti con vocaboli "non tecnici", cioè del tutto estranei alla teoria in esposizione, che quindi non hanno bisogno di spiegazione? La risposta è negativa per entrambe le domande.

Esempio 1.1.1

Si chiama *dizionario della lingua italiana* una raccolta di parole e locuzioni della lingua italiana (generalmente disposte in ordine alfabetico) per ciascuna delle quali è fornita una spiegazione del significato. Tale spiegazione è data usando soltanto parole della lingua italiana.
Nella edizione 1990 de "*Il dizionario della lingua italiana*" di Giacomo Devoto e Gian Carlo Oli ([5]) leggiamo:

UOMO := L'individuo di sesso maschile della specie umana.

UMANO := Proprio dell'uomo, in quanto rappresentante della specie.

Questo non è soddisfacente: infatti il lettore non può comprendere la spiegazione del sostantivo "UOMO" se non conosce il significato dell'aggettivo "UMANO"; e non può comprendere la spiegazione dell'aggettivo "UMANO" se non conosce il significato del sostantivo "UOMO".

Esempio 1.1.2

La più antica opera oggi conosciuta in cui la geometria viene trattata non come un sistema di regole pratiche e nozioni empiriche ma come una "scienza razionale" è costituita dagli "*Elementi*" di Euclide (matematico vissuto in Grecia nel III secolo a. C.). La teoria sviluppata da Euclide costituisce ancor oggi uno strumento semplice e efficace per descrivere la realtà fisica ([1]) attorno a noi e per studiare fenomeni di varia natura.

[1] almeno in prima approssimazione. Le descrizioni quantistico-relativistiche utilizzano una geometria "diversa", detta appunto "non euclidea".

Dovendo riferirsi a certi enti su cui costruire la geometria, Euclide ritenne necessario aprire la sua opera con una serie di "definizioni", ad esempio:
- Un punto è ciò che non ha parti.
- Una linea è una lunghezza senza larghezza.
- Una superficie è ciò che ha solo lunghezza e larghezza, ma non spessore.

Oggi queste "definizioni" non ci sembrano utilizzabili per sopportare il peso di una teoria. Non si comprende infatti come si possa spiegare che cos'è un "punto" mediante la nozione di "parte" senza poi precisare che cosa significhi "parte"; né come si possano definire "linea" e "superficie" mediante le parole "lunghezza", "larghezza" e "spessore" senza che queste vengano a loro volta definite.

Lo sviluppo (nel diciannovesimo secolo) della critica ai fondamenti della matematica (e in particolare della geometria euclidea) ha condotto a stabilire che una trattazione razionale e rigorosa deve procedere *assiomaticamente*: ciò significa che alla base della teoria non si deve porre un sistema di definizioni; si assegnano invece certe parole (dette *concetti primitivi*) e le regole precise (dette *assiomi*, o *postulati*) con le quali tali parole verranno utilizzate. In tal modo anziché definire gli enti fondamentali si descrivono piuttosto le relazioni logiche che intercorrono fra essi.

1.2 - La teoria degli insiemi.

La *teoria degli insiemi* può essere utilizzata per una costruzione organica e coerente di tutta la Matematica. Essa si è venuta sviluppando a partire dalla seconda metà del diciannovesimo secolo grazie ai lavori di (fra gli altri) Georg Cantor (1845 – 1918), Friedrich Ludwig Gotilds Frige (1848 – 1925) e Bertrand Russel (1872 – 1970), ed ha trovato una sistemazione ormai classica ad opera di Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871 – 1953) e Adolf Abraham Fraenkel (1891 – 1965).

Una rigorosa impostazione assiomatica (cfr. 1.1) esula certamente dalle nostre possibilità ([2]). Noi utilizzeremo tuttavia il linguaggio degli insiemi; pur non formalizzandole esplicitamente, cercheremo di stabilire "regole del gioco" chiare e precise che ci consentano di utilizzare le parole "primitive" (*insieme*, *elemento*, *appartiene*, ...) senza cadere in formalismi esasperati ma evitando imprecisioni che possano poi dar luogo a contraddizioni logiche.

Useremo dunque la parola "*insieme*" per indicare un ente completamente caratterizzato dagli *elementi* che ad esso *appartengono*. Per sgombrare il campo da possibili fraintendimenti, chiariamo subito che

---

[2] Il lettore interessato può consultare utilmente [7], se necessario nella traduzione italiana [8].

– si usa il termine “elemento” per indicare ciò che “appartiene” ad un “insieme”, senza che ciò prefiguri due mondi distinti, quello degli “elementi” e quello degli “insiemi”: anzi, gli elementi di un insieme possono benissimo essere essi stessi insiemi;
– poiché un insieme resta completamente caratterizzato dai propri elementi, si conviene in particolare che: due insiemi sono lo stesso insieme (si dice anche che *coincidono*) se e solo se hanno gli stessi elementi.

1.3 - Prime notazioni sugli insiemi.

Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ insiemi.

Se $\mathbf{a}$ è un elemento di $\mathbf{A}$ (ciò si esprime anche dicendo che $\mathbf{a}$ *appartiene* ad $\mathbf{A}$), scriveremo
$$\mathbf{a} \in \mathbf{A}.$$

Se ogni elemento di $\mathbf{A}$ è anche elemento di $\mathbf{B}$, diremo che $\mathbf{A}$ è un *sottoinsieme* di $\mathbf{B}$ (oppure che è *incluso*, o *contenuto* in $\mathbf{B}$) e scriveremo
$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}.$$

Se $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, cioè se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ hanno gli stessi elementi, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono lo stesso insieme e scriveremo
$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$
(osserviamo qui esplicitamente che intenderemo sempre l’uguaglianza nel senso “leibniziano” di *identità*). In generale, se si deve provare che $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, il procedimento migliore è appunto quello di mostrare che $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

Le scritture
$$\mathbf{a} \notin \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \neq \mathbf{B}$$
indicano la negazione rispettivamente di $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ (cioè significano rispettivamente: $\mathbf{a}$ non è un elemento di $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ non è un sottoinsieme di $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ non sono lo stesso insieme; quest’ultimo fatto si esprime anche dicendo che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono *diversi* o *distinti*).

Se $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ (ciò si esprime dicendo che $\mathbf{A}$ è *incluso propriamente* in $\mathbf{B}$, oppure che $\mathbf{A}$ è un *sottoinsieme proprio* di $\mathbf{B}$), scriveremo anche
$$\mathbf{A} \underset{\neq}{\subset} \mathbf{B}.$$

1.4 - Gli assiomi di Hilbert per la geometria piana.

Abbiamo ricordato in 1.1 la particolare attenzione che fu rivolta nel diciannovesimo secolo ai fondamenti della geometria euclidea. In seguito a ciò sono state proposte varie costruzioni assiomatiche di tale geometria; noi faremo riferimento all’opera “*Grundlagen der Geometrie*” di David Hilbert (1862-1943). Esula naturalmente dalle nostre possibilità uno studio diretto dei concetti primitivi e degli assiomi fissati da Hilbert; ci riserviamo però di richiamarli in qualche occasione (si può consultare [9]).

Ci farà comodo pensare al piano euclideo come a un insieme di punti nel quale vengono individuati particolari sottoinsiemi detti *rette*, *segmenti*, ecc.. In questo contesto, la nozione di *incidenza* fra il punto $\mathbf{A}$ e la retta $\mathcal{R}$ corrisponde all’*appartenenza* dell’elemento $\mathbf{A}$ al sottoinsieme $\mathcal{R}$ del piano (con la notazione introdotta in 1.3: $\mathbf{A} \in \mathcal{R}$).

Alla nozione di *retta* come particolare sottoinsieme del piano faremo riferimento in 1.6, 1.7 e 1.8 per "rappresentare" altri insiemi (il senso di questa espressione potrà essere precisato solo in 4.4.4). A tale scopo, supporremo fissati una retta $\mathcal{R}$ e due punti di essa: **O** (*origine*) e **U** (*punto unità*); il segmento $\overline{\mathbf{OU}}$ sarà la nostra *unità di misura*. Supponiamo note dallo studio della geometria effettuato nella Scuola Secondaria Superiore le nozioni di *multiplo* e *sottomultiplo* di un segmento, di *commensurabilità* fra segmenti e di *misura rispetto a* $\overline{\mathbf{OU}}$ dei segmenti commensurabili con $\overline{\mathbf{OU}}$ (tale misura è in generale un numero razionale, cfr. 1.8).

1.5 - Gli assiomi di Peano per i numeri naturali.

Vediamo un esempio particolarmente semplice e nello stesso tempo profondo: la costruzione assiomatica proposta dal matematico italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932) per i numeri naturali.

Riportiamo, con qualche irrilevante aggiornamento nei termini ([3]), la formulazione di [11]; la prima esposizione del sistema di assiomi è in un lavoro scientifico pubblicato nel 1891. I concetti primitivi sono indicati con la locuzione "*numero naturale*" e le parole "*zero*", "*successivo*", "*insieme*" e "*appartiene*". Gli assiomi sono i seguenti:

(P1) – Zero è un numero naturale.

(P2) – Ogni numero naturale ha un successivo, che è anch'esso un numero naturale.

(P3) – Sia **A** un insieme di numeri naturali. Supponiamo che zero appartenga ad **A** e che per ogni numero naturale che appartiene ad **A** anche il suo successivo appartenga ad **A**; allora ogni numero naturale appartiene ad **A**.

(P4) – Se due numeri naturali hanno lo stesso successivo, essi sono lo stesso numero.

(P5) – Zero non è il successivo di alcun numero naturale.

Questi concetti primitivi e questi assiomi sono sufficienti per definire tutte le usuali nozioni relative ai numeri naturali e per dimostrarne le proprietà. Ad esempio, si definisce il numero "uno" come il successivo di zero; il numero "due" come il successivo di "uno"; il risultato della somma $m+n$ come il successivo del successivo del successivo... (n volte) di m; il risultato del prodotto $m \cdot n$ come il risultato della somma di n numeri tutti uguali a m; ecc. ecc..

L'assioma (P3) è detto anche *principio di induzione*. Esso fornisce il sostegno teorico a un'importante tecnica di dimostrazione, detta appunto *dimostrazione per induzione,* sulla quale torneremo in 2.5.

---

[3] Ad esempio, Peano scrive "classe" anziché "insieme", e scrive "numero" *tout-court* anziché "numero naturale".

1.6 - Ancora sull'insieme dei numeri naturali.

Abbiamo visto in 1.5 un sistema di assiomi per l'insieme dei numeri naturali, che indichiamo con $\mathbb{N}$. Supporremo note dagli studi precedenti le informazioni essenziali su tale insieme; non preciseremo qui dunque che cosa si intende con le parole "*somma*", "*prodotto*", "*minore*", ecc. Ricordiamo però esplicitamente la seguente importante proprietà di $\mathbb{N}$:

Osservazione 1.6.1

Comunque presi due numeri naturali a, b con b $\neq 0$, restano univocamente determinati due numeri naturali q, r tali che $a = bq + r$ e $r < b$.
Essi si dicono rispettivamente *quoziente* e *resto* della *divisione euclidea* di a per b.

Per rappresentare sulla retta (come accennato in 1.4) un numero naturale n, si procede come segue. Si considera un segmento $\overline{\textbf{ON}}$ di misura n, avente il primo estremo nell'origine **O** e il secondo estremo nella semiretta individuata da **O** contenente **U**; il secondo estremo del segmento $\overline{\textbf{ON}}$ è il punto della retta che "rappresenta" il numero n.

Siano fissati un insieme **A** di numeri e uno o più simboli (generalmente, lettere di qualche alfabeto: x, y, *a*, *b*, ϑ, $\ldots$).

Ricordiamo che si dice *equazione algebrica in* **A** *nell'incognita* x un'uguaglianza fra due polinomi (a coefficienti in **A**, nella indeterminata x) della quale ci si chiede per quali valori di x scelti in **A** sia verificata; gli elementi di **A** che sostituiti a x verificano l'uguaglianza si dicono le *soluzioni in* **A** dell'equazione data.

Analogamente si definiscono le equazioni algebriche in più incognite x, y, *a*, *b*, ϑ, $\ldots$: si veda, ad es., 14.1. Si estende anche la nozione di *equazione* considerando espressioni più complesse dei polinomi, e/o insiemi **A** i cui elementi non sono numeri: in questo caso però non si parla di equazione "algebrica" ma si usa un altro opportuno aggettivo.

Risolvere un'equazione in **A** significa trovarne le soluzioni.

Siano $a, b \in \mathbb{N}$. In generale, l'equazione $x + a = b$ nell'incognita x non ha soluzioni in $\mathbb{N}$.

Esempio 1.6.2

L'equazione $x + 2 = 1$ nell'incognita x non ha soluzioni in $\mathbb{N}$.

1.7 - L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

Si indica con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi $(\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots)$. Come già per $\mathbb{N}$, supponiamo note dagli studi precedenti le informazioni essenziali su $\mathbb{Z}$ e non precisiamo che cosa si intende con le parole "*somma*", "*prodotto*", "*minore*", ecc..

Ricordiamo solo che gli interi diversi da 0 si distinguono in *positivi* (quelli maggiori di 0, che si identificano con i numeri naturali maggiori di 0) e *negativi* (quelli minori di 0).

L'insieme dei numeri interi positivi si indica con $\mathbb{Z}^+$; è usuale identificare (e anche noi lo faremo) $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ con $\mathbb{N}$. L'insieme dei numeri interi negativi si indica con $\mathbb{Z}^-$.

Osservazione 1.7.1

Si estende all'insieme $\mathbb{Z}$ la nozione di *divisione euclidea* ricordata in 1.6.6: comunque presi due numeri interi a, b con $b \neq 0$, restano univocamente determinati due numeri interi q, r (detti rispettivamente *quoziente* e *resto*) tali che $a = bq + r$ e $0 \leq r < |\, b \,|$.

Esercizio 1.7.2

Si determinino quoziente e resto della divisione euclidea di 18 per -5, della divisione euclidea di -18 per 5 e della divisione euclidea di -18 per -5.

Ricordiamo anche la nozione di "valore assoluto" per i numeri interi. Sia $z \in \mathbb{Z}$; si dice *valore assoluto* di z, e si indica con $|\, z \,|$, il numero naturale così definito:

$$|\, z \,| = z \text{ se } z \geq 0, \qquad |\, z \,| = -z \text{ se } z < 0.$$

I numeri interi si rappresentano sulla retta con gli stessi punti che rappresentano i numeri naturali e con i loro simmetrici rispetto all'origine.

Per ogni scelta dei numeri interi a e b, l'equazione $x + a = b$ nell'incognita x ha soluzioni in $\mathbb{Z}$. In generale, però, l'equazione $ax = b$ (con $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$) nell'incognita x non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.

Esempio 1.7.3

L'equazione $2\,x = 1$ nell'incognita x non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.

1.8 - L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Si indica con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, rappresentabili come è noto nella forma $\frac{m}{n}$ con m, n numeri interi. Si noti che è opportuno distinguere fra la *frazione* $\frac{m}{n}$ e il *numero razionale* che tale frazione rappresenta (ciò sarà precisato meglio in 6.3.6); ricordiamo inoltre che ogni numero razionale si può rappresentare con infinite frazioni ([4]).

Come già per $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, supponiamo note dagli studi precedenti le informazioni essenziali su $\mathbb{Q}$ e non precisiamo che cosa si intende con le parole "*somma*", "*prodotto*", "*minore*", ecc.. Ricordiamo solo quanto segue.

Un numero razionale si dice *positivo* se è maggiore di 0, *negativo* se è minore di 0. L'insieme dei numeri razionali positivi si indica con $\mathbb{Q}^+$; quello dei numeri razionali negativi si indica con $\mathbb{Q}^-$.

Il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ costituito dai numeri rappresentabili nella forma $\frac{n}{1}$, con $n \in \mathbb{Z}$, si identifica usualmente con $\mathbb{Z}$, e anche noi lo faremo. Con questa convenzione, e quella analoga introdotta in 1.7, si ha dunque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Il numero razionale $\frac{m}{n}$ (con m, $n \in \mathbb{Z}$) si rappresenta sulla retta (come accennato in 1.4) col secondo estremo del segmento di misura $\frac{|m|}{|n|}$ che ha il primo estremo nell'origine **O** e giace nella semiretta individuata da **O** contenente **U** (se $\frac{m}{n} > 0$) oppure nella semiretta opposta (se $\frac{m}{n} < 0$). Si noti che i punti così individuati al variare di $\frac{m}{n}$ sono "densi", nel senso che fra due di essi c'è sempre un altro punto che corrisponde a un numero razionale.

Si estende anche all'insieme $\mathbb{Q}$ la nozione di "valore assoluto".

Sia $x \in \mathbb{Q}$; si dice *valore assoluto* di x, e si indica con $|\, x \,|$, il numero razionale (non negativo) così definito:

$$|\, x \,| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -\,x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Per ogni scelta di a e b in $\mathbb{Q}$, hanno soluzioni in $\mathbb{Q}$ sia l'equazione $x + a = b$ (nell'incognita x) che (purché sia $a \neq 0$) l'equazione $ax = b$ (nell'incognita x).

Però, in generale, se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{Q}$, l'equazione $x^n = a$ (nell'incognita x) non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$:

---

[4] La frazione $\frac{m}{n}$ si dice *ridotta ai minimi termini* se il massimo comun divisore fra m e n è 1 (ossia se, come anche si dice, m e n sono *primi fra loro*). Ogni numero razionale si rappresenta <u>in uno e un solo modo</u> con una frazione ridotta ai minimi termini il cui denominatore sia positivo.

Teorema 1.8.1

L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$.

Dimostrazione — Supponiamo per assurdo (si veda la sez. 2.4 più avanti) che esista un numero razionale x tale che $x^2 = 2$.

Posto $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sarà $\frac{m^2}{n^2} = 2$ e dunque $m^2 = 2n^2$.

Osserviamo che nella scomposizione in fattori primi del quadrato di qualsiasi numero intero ogni fattore primo compare sempre con esponente pari: infatti se p compare con esponente k nella scomposizione in fattori primi di a, allora p compare con esponente $2k$ in quella di a^2.

Consideriamo ora la scomposizione in fattori primi di n^2: in essa, per quanto appena osservato, il fattore "2" compare con esponente pari. Dunque il fattore "2" compare con esponente dispari nella scomposizione in fattori primi di $2n^2$, ossia di m^2; e ciò è assurdo, di nuovo per quanto si è osservato sopra (si ricordi che la scomposizione in fattori primi di un numero intero è unica).

2.- ELEMENTI DI LOGICA

2.1 - Introduzione.

Si è detto in 1.1 che gli assiomi costituiscono le “regole precise” con le quali vengono utilizzati i concetti primitivi. Il lettore attento si sarà accorto che ciò non è del tutto esatto: ad esempio, quando affermiamo che “Zero ha un successivo, che è anch’esso un numero naturale” (il che ci consente di dare la definizione di “Uno”) non utilizziamo solo gli assiomi (P1) e (P2) di 1.5 ma anche una regola deduttiva nota come *modus ponens*. In effetti, a monte dei concetti primitivi e degli assiomi ci sono delle più generali “regole di ragionamento” che sono studiate da un particolare ramo della Matematica detto *Logica matematica*.

Noi non possiamo affrontare il complesso apparato della Logica matematica (che, naturalmente, dovrebbe essere introdotto per via assiomatica). Riassumiamo in 2.2 e 2.3 quelle poche nozioni e i semplici risultati che avremo poi occasione di utilizzare esplicitamente.

2.2 - Elementi di calcolo delle proposizioni.

Ciò che vogliamo fare è, intuitivamente, questo: date alcune affermazioni (dette *proposizioni*, o *enunciati*), per ciascuna delle quali possiamo dire (non importa in base a che cosa) se è *vera* oppure *falsa*, stabilire un criterio per costruire altre frasi (più “complesse”; anch’esse saranno dette *proposizioni* o *enunciati*) e decidere “automaticamente” la verità o falsità di queste ultime.

Non cerchiamo di definire che cos’è una *proposizione*; useremo la parola *enunciato* come sinonimo di *proposizione*. Conveniamo che ad ogni proposizione resti associato uno e uno solo dei due numeri naturali 0 e 1 (che viene detto *valore di verità* della proposizione) ([5]). Un enunciato si dice *vero* se ha valore di verità 1, si dice invece *falso* se ha valore di verità 0. Se **a**, **b** sono proposizioni, scriveremo

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$$

per indicare che **a** e **b** hanno lo stesso valore di verità (ossia, sono entrambe vere oppure sono entrambe false).

---

[5] Col linguaggio che sarà introdotto in 4.2, potremmo dire che il *valore di verità* è una funzione dall’insieme delle proposizioni in $\{0, 1\}$.

Dato un insieme di proposizioni, ciascuna col suo valore di verità, possiamo costruire altri oggetti, che chiameremo ancora *proposizioni*, utilizzando (anche ripetutamente) i sei simboli (,), $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ e le seguenti regole:

– Se **a** è una proposizione, anche $\neg$ (**a**) è una proposizione (che si legge: "*non* **a**").

– Se **a**, **b** sono proposizioni, anche (**a**) $\vee$ (**b**) è una proposizione (che si legge: "**a** *oppure* **b**").

– Se **a**, **b** sono proposizioni, anche (**a**) $\wedge$ (**b**) è una proposizione (che si legge: "**a** *e* **b**").

– Se **a**, **b** sono proposizioni, anche (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) è una proposizione (che si legge: "**a** *implica* **b**", o anche "*da* **a** *segue* **b**").

Alle proposizioni $\neg$ (**a**), (**a**) $\vee$ (**b**), (**a**) $\wedge$ (**b**), (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) assegniamo un valore di verità completamente determinato dai valori di verità di **a** e **b**, con le seguenti regole:

– il valore di verità di $\neg$ (**a**) è: 1 se il valore di verità di **a** è 0; 0 altrimenti;

– il valore di verità di (**a**) $\vee$ (**b**) è: 0 se entrambe le proposizioni **a**, **b** hanno valore di verità 0; 1 altrimenti;

– il valore di verità di (**a**) $\wedge$ (**b**) è: 1 se entrambe le proposizioni **a**, **b** hanno valore di verità 1; 0 altrimenti.

– il valore di verità di (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) è: 0 se la proposizione **a** ha valore di verità 1 e la proposizione **b** ha valore di verità 0; 1 altrimenti.

I quattro simboli $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ si dicono *connettivi proposizionali* (rispettivamente: *negazione logica*, *disgiunzione logica*, *congiunzione logica* e *implicazione logica*). I due simboli (e) si dicono *parentesi ausiliarie* e usualmente si omettono quando ciò non dia luogo ad ambiguità: dunque (ad esempio) si scrive **a** $\vee$ **b** in luogo di (**a**) $\vee$ (**b**), e si scrive **a** $\Rightarrow$ **b** in luogo di (**a**) $\Rightarrow$ (**b**); ma non si considera accettabile (perché ambigua) la scrittura **a** $\vee$ **b** $\Rightarrow$ **c**. Si scrive talvolta **a** $\Leftrightarrow$ **b** come abbreviazione di (**a** $\Rightarrow$ **b**) $\wedge$ (**b** $\Rightarrow$ **a**).

Osservazione 2.2.1

Le proposizioni che consideriamo sono generalmente espresse con parole della lingua italiana e simboli matematici. Tuttavia, per ciò che diremo, non ha interesse la proposizione in sé ma il suo valore di verità; niente impedisce perciò in teoria di calcolare il valore di verità per espressioni come (5 è un numero primo) $\wedge$ (Francesca è bella)

oppure (Andrea è simpatico) $\Rightarrow$ (125 è un quadrato perfetto)

o anche (fugjkhl mkl fg%4$) $\vee$ (ghjoooooi)

purché si sia stabilita preliminarmente il valore di verità per le proposizioni "Francesca è bella", "Andrea è simpatico" (assumendosene ogni responsabilità... nei confronti degli interessati!), "fugjkhl mkl fg%4$" e "ghjoooooi". Per quanto riguarda proposizioni su enti matematici (le uniche che interverranno nei nostri esempi) **converremo che il valore di verità sia quello risultante dalla usuale teoria matematica**.

Esempio 2.2.2

Sono esempi di proposizioni vere le seguenti:

$(2 \text{ è un numero pari}) \wedge (4 \text{ è un numero pari})$;

$(2 \text{ è un numero pari}) \vee (3 \text{ è un numero pari})$;

$(3 \text{ è un numero pari}) \Rightarrow (4 \text{ è un numero pari})$;

$(3 \text{ è un numero pari}) \Rightarrow (5 \text{ è un numero pari})$;

$(\neg\,(3 \text{ è un numero pari})) \wedge (4 \text{ è un numero pari})$.

Sono esempi di proposizioni false le seguenti:

$(2 \text{ è un numero pari}) \wedge (3 \text{ è un numero pari})$;

$(\neg\,(2+3=5)) \vee (1>2)$;

$((3 \text{ è un numero pari}) \vee (4 \text{ è un numero pari})) \Rightarrow (5 \text{ è un numero pari})$.

Non sono esempi di proposizioni le seguenti:

$(2 \text{ è un numero pari}) \wedge \ \vee (4 \text{ è un numero pari})$;

$\neg \vee (2 \text{ è un numero pari}) \wedge (5 \text{ è un numero primo})$;

$\wedge\, (2 \text{ è un numero pari}) \neg\, (3 \text{ è un numero pari})$.

Inoltre:

"2 è un numero pari" ha lo stesso valore di verità di "$2+3=5$" ;

"5 è un numero pari" ha lo stesso valore di verità di "39 è un numero primo" .

Osservazione 2.2.3

Siano **a** e **b** proposizioni. Se **a** e **a** $\Rightarrow$ **b** sono vere, allora **b** è vera (questa "regola di dimostrazione" è nota col nome di "*modus ponens*"); se **a** $\Rightarrow$ **b** è vera e **b** è falsa, allora **a** è falsa.

Dimostrazione — Supponiamo che **a** e **a** $\Rightarrow$ **b** siano vere; poiché **a** è vera, se **b** fosse falsa allora **a** $\Rightarrow$ **b** sarebbe falsa; dunque **b** non è falsa, e quindi **b** è vera. Supponiamo ora che **a** $\Rightarrow$ **b** sia vera e **b** sia falsa; poiché **b** è falsa, se **a** fosse vera allora **a** $\Rightarrow$ **b** sarebbe falsa; dunque **a** non è vera, e quindi **a** è falsa.

Osservazione 2.2.4

Siano $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\ldots$, $\mathbf{p_n}$ proposizioni. Se $\mathbf{p_1} \Rightarrow \mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_2} \Rightarrow \mathbf{p_3}$, $\ldots$, $\mathbf{p_{n-1}} \Rightarrow \mathbf{p_n}$ sono vere, allora $\mathbf{p_1} \Rightarrow \mathbf{p_n}$ è vera.

Dimostrazione — Proviamo l'asserto per $n = 3$ (in generale si potrebbe procedere per induzione, cfr. 2.5). Siano **a**, **b**, **c** proposizioni tali che **a** $\Rightarrow$ **b** e **b** $\Rightarrow$ **c** sono vere. Se **a** è falsa, certamente **a** $\Rightarrow$ **c** è vera; se **a** è vera, allora **b** è vera (osservazione 2.2.3): ma allora, ancora per l'osservazione 2.2.3, **c** è vera; dunque in ogni caso **a** $\Rightarrow$ **c** è vera.

Siano date alcune proposizioni **a**, **b**, **c**, $\ldots$ ed altre proposizioni $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, $\ldots$ costruite a partire da esse mediante i connettivi come descritto sopra.

È spesso conveniente scrivere delle tabelle che esprimano i valori di verità per $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, $\ldots$ in funzione di tutti i possibili valori di verità di **a**, **b**, **c**, $\ldots$; tali tabelle si dicono *tabelle di verità* per $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$, $\ldots$. Ad esempio:

$\mathbf{a}$	$\neg\mathbf{a}$	$\neg(\neg\mathbf{a})$
0	1	0
1	0	1

$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$	$\mathbf{b} \vee \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$	$(\neg\mathbf{a}) \vee \mathbf{b}$	$\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Si noti che dall'esame di una tabella di verità si può dedurre che certe proposizioni costruite con l'uso dei connettivi a partire da altre assumono lo stesso valore di verità qualunque sia il valore di verità delle proposizioni che le compongono (si dice allora talvolta che sono *logicamente equivalenti*). Così, dalle precedenti tabelle di verità si ricava che:

Osservazione 2.2.5

Qualunque siano le proposizioni **a** e **b**,

$$\mathbf{a} \sim \neg(\neg\mathbf{a}) \;;$$
$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \sim \mathbf{b} \vee \mathbf{a} \;;$$
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \sim \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \;;$$
$$\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b} \sim (\neg\mathbf{a}) \vee \mathbf{b} \;.$$

Dalle seguenti tabelle di verità

$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$	$\neg(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$	$\neg\mathbf{a}$	$\neg\mathbf{b}$	$(\neg\mathbf{a}) \wedge (\neg\mathbf{b})$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	$\neg(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$	$\neg\mathbf{a}$	$\neg\mathbf{b}$	$(\neg\mathbf{a}) \vee (\neg\mathbf{b})$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

si ricavano le cosiddette *leggi di De Morgan*:

Osservazione 2.2.6

Qualunque siano le proposizioni **a** e **b**,

$\neg(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$ ha lo stesso valore di verità di $(\neg\mathbf{a}) \wedge (\neg\mathbf{b})$

e $\neg(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ ha lo stesso valore di verità di $(\neg\mathbf{a}) \vee (\neg\mathbf{b})$.

Esercizio 2.2.7

Dimostrare, scrivendo le opportune tabelle di verità, che, qualunque siano le proposizioni **a** e **b**,

$\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$ ha lo stesso valore di verità di $(\neg\mathbf{b}) \Rightarrow (\neg\mathbf{a})$

e $\neg(\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b})$ ha lo stesso valore di verità di $\mathbf{a} \wedge (\neg\mathbf{b})$.

Esercizio 2.2.8

Dimostrare mediante opportune tabelle di verità quanto già visto nelle osservazioni 2.2.3 e 2.2.4.

2.3 - Elementi di calcolo dei predicati.

Sia **A** un insieme. Fissato un simbolo (ad esempio, x) che chiameremo *variabile*, consideriamo certi enti che diremo *proposizioni aperte* (o *predicati*) con *variabile libera* x su **A**. Come già in 2.2 per le proposizioni, non cerchiamo di dare una definizione di *proposizione aperta*; stabiliamo solo la seguente regola: se $\mathbf{p}(x)$ è una proposizione aperta con variabile libera x su **A**, deve esistere un criterio che per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ permette di ricavare da $\mathbf{p}(x)$ una proposizione (nel senso di 2.2), che diremo *ottenuta da* $\mathbf{p}(x)$ *sostituendo* **a** *ad* x e indicheremo con $\mathbf{p}(\mathbf{a})$. Generalmente, una proposizione aperta con variabile libera x su **A** è espressa mediante una locuzione della lingua italiana (eventualmente con simboli matematici) in cui compare la x; e per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ si ottiene una proposizione proprio col "sostituire" (nel senso letterale di "mettere una cosa nel luogo di un'altra", cfr. [5]) **a** ad x.

Esempio 2.3.1

Sono proposizioni aperte con variabile libera x su $\mathbb{N}$:

3 è un divisore di x;

$x + 1 \geq 10$;

$(x > 5) \wedge (x \text{ è pari})$;

$(x \text{ è pari}) \Rightarrow (x \text{ è multiplo di } 4)$.

Si noti che ciascuna di esse non è né vera nè falsa (solo le proposizioni sono vere o false!). Però: sostituendo 6 alla variabile x, la prima e la terza diventano proposizioni vere, la seconda e la quarta diventano proposizioni false; sostituendo 12 alla variabile x, diventano tutte proposizioni vere; sostituendo 2 alla variabile x, diventano tutte proposizioni false.

Non sono invece proposizioni aperte con variabile libera x su $\mathbb{N}$:

$y + 1 \geq 10$; x è grande ; $(5 + x = 7) \neg \wedge x$.

Esercizio 2.3.2

Si stabilisca se la seguente proposizione aperta con variabile libera x su $\mathbb{N}$

$$(x \text{ è pari}) \Rightarrow (x \text{ è multiplo di } 4)$$

diventa una proposizione vera sostituendo alla x ciascuno dei seguenti numeri naturali:

7, 8, 9, 10.

A partire dai predicati si possono ottenere enunciati utilizzando due simboli speciali $\exists$ e $\forall$ (detti rispettivamente *quantificatore esistenziale* e *quantificatore universale*) e le seguenti regole:

Sia **A** un insieme, e sia $\mathbf{p}(x)$ una proposizione aperta con variabile libera x su **A**.

La $$(\exists x \in \mathbf{A})(\mathbf{p}(x))$$
è una proposizione (che si legge "*esiste almeno un* x *in* **A** *tale che* $\mathbf{p}(x)$") alla quale si assegna il seguente valore di verità: 1 se si può trovare un elemento **a** di **A** che sostituito alla x dà luogo ad una proposizione vera, 0 altrimenti.

La $$(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{p}(x))$$
è una proposizione (che si legge "*per ogni* x $\mathbf{p}(x)$") alla quale si assegna il seguente valore di verità: 1 se ogni elemento **a** di **A** sostituito alla x dà luogo ad una proposizione vera, 0 altrimenti.

Se è chiaro dal contesto quale sia l'insieme **A** considerato, si scrive $\exists x(\mathbf{p}(x))$ anziché $(\exists x \in \mathbf{A})(\mathbf{p}(x))$ e si scrive $\forall x(\mathbf{p}(x))$ anziché $(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{p}(x))$. Si usano anche le seguenti convenzioni:

si dice che $\exists x\,(\mathbf{p}(x))$ *è vera* [risp. *falsa*] *in* **A** se $(\exists x \in \mathbf{A})(\mathbf{p}(x))$ è vera [risp. falsa]

e si dice che $\forall x\,(\mathbf{p}(x))$ *è vera* [risp. *falsa*] *in* **A** se $(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{p}(x))$ è vera [risp. falsa].

Esempio 2.3.3

Sono proposizioni vere in $\mathbb{N}$ le seguenti:

$$\exists x\,((x > 2) \Rightarrow (x \text{ è multiplo di } 10))\ ;$$

$$\forall x\,((x < 16) \vee (2x > 30))\ .$$

Sono proposizioni false in $\mathbb{N}$ le seguenti:

$$\exists x\,((2x \text{ è dispari}) \vee (x + 1 = x - 1))\ ;$$

$$\forall x\,((x > 2) \Rightarrow (x \text{ è multiplo di } 10))\ .$$

La proposizione $\exists x\,(2x = 3)$ è falsa in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, ed è vera in $\mathbb{Q}$.

La proposizione $\forall x\,(x \geq 0)$ è vera in $\mathbb{N}$ ed è falsa in $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.3.4

Per ciascuna delle seguenti proposizioni si stabilisca se è vera oppure falsa in $\mathbb{N}$:

$$\forall x\,((x \text{ è pari}) \Rightarrow (x \text{ è multiplo di } 4))\ ;$$

$$\forall x\,((x \text{ è multiplo di } 4) \Rightarrow (x \text{ è pari}))\ ;$$

$$\exists x\,((x \text{ è pari}) \wedge (x \text{ è multiplo di } 3))\ ;$$

$$\forall x\,((x \text{ è pari}) \vee (x \text{ è multiplo di } 3))\ ;$$

$$\forall x\,((x \text{ è pari}) \vee (x-1 \text{ è multiplo di } 4) \vee (x+1 \text{ è multiplo di } 4)).$$

Osservazione 2.3.5

Sia **A** un insieme i cui elementi sono $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ..., $\mathbf{a}_n$ (dove n è un numero naturale)([6]). Se $\mathbf{p}(x)$ è un predicato su **A**,

$\forall x\,(\mathbf{p}(x))$ ha lo stesso valore di verità di $\mathbf{p}(\mathbf{a_1}) \wedge \mathbf{p}(\mathbf{a_2}) \wedge \ldots \wedge \mathbf{p}(\mathbf{a}_n)$;

$\exists x\,(\mathbf{p}(x))$ ha lo stesso valore di verità di $\mathbf{p}(\mathbf{a_1}) \vee \mathbf{p}(\mathbf{a_2}) \vee \ldots \vee \mathbf{p}(\mathbf{a}_n)$.

In questo senso, i quantificatori si possono considerare una generalizzazione dei connettivi $\vee$ e $\wedge$, e le due osservazioni che seguono si possono considerare una estensione delle leggi di De Morgan (2.2.6).

Osservazione 2.3.6

Qualunque sia l'insieme **A**, e qualunque sia il predicato $\mathbf{p}(x)$ su **A**,

$\neg\,(\forall x\,(\mathbf{p}(x)))$ ha lo stesso valore di verità di $\exists x\,(\neg\,\mathbf{p}(x))$.

Dimostrazione — Sono possibili due casi: $\forall x\,(\mathbf{p}(x))$ è vera, oppure $\forall x\,(\mathbf{p}(x))$ è falsa. Supponiamo in primo luogo che $\forall x\,(\mathbf{p}(x))$ sia vera (e quindi $\neg\,(\forall x\,(\mathbf{p}(x)))$ sia falsa); allora ogni elemento di **A** sostituito alla x in $\mathbf{p}(x)$ dà luogo ad una proposizione vera, e dunque sostituito alla x in $\neg\,\mathbf{p}(x)$ dà luogo ad una proposizione falsa: non si può perciò trovare alcun elemento di **A** che sostituito alla x in $\neg\,\mathbf{p}(x)$ dia luogo ad una proposizione vera, e dunque la proposizione $\exists x(\neg\,\mathbf{p}(x))$ è falsa.
Supponiamo poi che $\forall x\,(\mathbf{p}(x))$ sia falsa (e quindi $\neg\,(\forall x\,(\mathbf{p}(x)))$ sia vera): allora non ogni elemento di **A** sostituito alla x in $\mathbf{p}(x)$ dà luogo ad una proposizione vera; c'è, in altri termini, un opportuno $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ per il quale $\mathbf{p}(\mathbf{a})$ è falsa, e quindi $\neg\,\mathbf{p}(\mathbf{a})$ è vera: ciò significa che la proposizione $\exists x\,(\neg\,\mathbf{p}(x))$ è vera.

---

[6] Con la notazione che introdurremo in 3.2, $\mathbf{A} := \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. Si può descrivere questa situazione dicendo che **A** è un *insieme finito*.

Osservazione 2.3.7

Qualunque sia l'insieme **A**, e qualunque sia il predicato $\mathbf{p}(x)$ su **A**,

$$\neg\,(\exists x\,(\mathbf{p}(x))) \quad \text{ha lo stesso valore di verità di} \quad \forall x\,(\neg\,\mathbf{p}(x)).$$

Dimostrazione — Per quanto visto in 2.2.5 e 2.3.6, si ha che

$$\forall x\,(\neg\,\mathbf{p}(x)) \sim \neg\,(\neg\,(\forall x\,(\neg\,\mathbf{p}(x)))) \sim \neg\,(\exists x\,(\neg\,(\neg\,\mathbf{p}(x)))) \sim \neg\,(\exists x\,(\mathbf{p}(x)))$$

e ciò è proprio quel che si voleva dimostrare.

Esercizio 2.3.8

Si dimostri che, qualunque sia l'insieme **A**, e qualunque sia il predicato $\mathbf{p}(x)$ su **A**,

$$\exists x\,(\mathbf{p}(x)) \quad \text{ha lo stesso valore di verità di} \quad \neg\,(\forall x\,(\neg\,\mathbf{p}(x)))$$

e

$$\forall x\,(\mathbf{p}(x)) \quad \text{ha lo stesso valore di verità di} \quad \neg\,(\exists x\,(\neg\,\mathbf{p}(x))).$$

Osservazione 2.3.9

Sia **A** un insieme, e siano $\mathbf{p}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ predicati su **A**. Se per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ l'enunciato $\mathbf{p}(\mathbf{a})$ ha lo stesso valore di verità dell'enunciato $\mathbf{q}(\mathbf{a})$, allora

$$\exists x\,(\mathbf{p}(x)) \quad \text{ha lo stesso valore di verità di} \quad \exists x\,(\mathbf{q}(x))$$

e

$$\forall x\,(\mathbf{p}(x)) \quad \text{ha lo stesso valore di verità di} \quad \forall x\,(\mathbf{q}(x)).$$

Tenendo conto di quanto visto nella sez. 2.2, si può così ad esempio affermare che

$$\exists x\,(\neg\,(\mathbf{p_1}(x) \wedge \mathbf{p_2}(x))) \quad \text{ha lo stesso valore di verità di} \quad \exists x\,((\neg\,\mathbf{p_1}(x)) \vee (\neg\,\mathbf{p_2}(x)))$$

e che

$$\forall x\,(\neg\,\mathbf{p_1}(x) \vee \mathbf{p_2}(x)) \quad \text{ha lo stesso valore di verità di} \quad \forall x\,(\mathbf{p_1}(x) \Rightarrow \mathbf{p_2}(x)).$$

Dimostrazione — Supponiamo che $\exists x\,(\mathbf{p}(x))$ sia vero. Allora si può trovare un elemento $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}$ per il quale $\mathbf{p}(\mathbf{a}_0)$ è vero; per ipotesi, anche $\mathbf{q}(\mathbf{a}_0)$ è vero, e dunque $\exists x\,(\mathbf{q}(x))$ è vero. Supponiamo ora che $\exists x\,(\mathbf{p}(x))$ sia falso. Allora per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ $\mathbf{p}(\mathbf{a})$ è falso, e quindi anche $\mathbf{q}(\mathbf{a})$ è falso; dunque $\exists x\,(\mathbf{q}(x))$ è falso.

Supponiamo poi che $\forall x\,(\mathbf{p}(x))$ sia vero; allora $\mathbf{p}(\mathbf{a})$ è vero per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$; per ipotesi, anche $\mathbf{q}(\mathbf{a})$ è vero per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, e dunque $\forall x\,(\mathbf{q}(x))$ è vero. Supponiamo infine che $\forall x\,(\mathbf{p}(x))$ sia falso. Allora si può trovare un elemento $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}$ per il quale $\mathbf{p}(\mathbf{a}_0)$ è falso; per ipotesi, anche $\mathbf{q}(\mathbf{a}_0)$ è falso, e dunque $\forall x\,(\mathbf{q}(x))$ è falso.

Esercizio 2.3.10

Si provi che, qualunque sia l'insieme **A**, e qualunque siano i predicati $\mathbf{p}(x)$ e $\mathbf{q}(x)$ su **A**,

$\exists x\,(\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$ ha lo stesso valore di verità di $(\exists x\,(\mathbf{p}(x))) \vee (\exists x\,(\mathbf{q}(x)))$

e $\forall x\,(\mathbf{p}(x) \wedge \mathbf{q}(x))$ ha lo stesso valore di verità di $(\forall x\,(\mathbf{p}(x))) \wedge (\forall x\,(\mathbf{q}(x)))$.

Si osservi poi, scegliendo opportunamente due predicati $\mathbf{p}(x)$ e $\mathbf{q}(x)$ su $\mathbb{N}$, che in generale

$\exists x\,(\mathbf{p}(x) \wedge \mathbf{q}(x))$ non ha lo stesso valore di verità di $(\exists x\,(\mathbf{p}(x))) \wedge (\exists x\,(\mathbf{q}(x)))$

e $\forall x\,(\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$ non ha lo stesso valore di verità di $(\forall x\,(\mathbf{p}(x))) \vee (\forall x\,(\mathbf{q}(x)))$.

Le osservazioni che abbiamo fatto nelle sezioni 2.2 e 2.3, e in particolare 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7, 2.3.6, 2.3.7 e 2.3.9, ci permettono di semplificare utilmente espressioni logiche anche complesse.

Esempio 2.3.11

Si ha la seguente catena di proposizioni che hanno a due a due lo stesso valore di verità:

$$\neg\,(\exists x\,(\mathbf{p}(x) \wedge (\neg\,\mathbf{q}(x)))) \;\sim\; \forall x\,(\neg\,(\mathbf{p}(x) \wedge (\neg\,\mathbf{q}(x)))) \;\sim$$
$$\sim\; \forall x\,((\neg\,\mathbf{p}(x)) \vee (\neg\,(\neg\,\mathbf{q}(x)))) \;\sim\; \forall x\,((\neg\,\mathbf{p}(x)) \vee (\mathbf{q}(x))) \;\sim\; \forall x\,(\mathbf{p}(x) \Rightarrow \mathbf{q}(x)).$$

La nozione di "proposizione aperta (o predicato) con variabile libera x su un insieme" si estende al caso in cui vi siano più variabili, anche con la possibilità che queste assumano valori su insiemi diversi. Resta essenziale che valga la seguente regola: se $\mathbf{p}(x_1, x_2, ..., x_n)$ è una proposizione aperta con variabili libere x_1 su $\mathbf{A}_1$, x_2 su $\mathbf{A}_2$, ..., x_n su $\mathbf{A}_n$, deve esistere un criterio che per ogni $\mathbf{a}_i \in \mathbf{A}_i$ permette di ricavare da $\mathbf{p}(x_1, x_2, ..., x_n)$ una proposizione $\mathbf{p}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$.

Una proposizione aperta con due [risp. tre] variabili libere si dice anche *predicato binario* [risp. *ternario*].

Esempio 2.3.12

Sono predicati binari con variabili libere x su $\mathbb{Q}$ e n su $\mathbb{N}$:

$(1+x)^n \geq 1 + nx$;

$x^{(n+2)} = x^n + x^2$.

Mediante l'uso dei quantificatori (con regole del tutto analoghe a quelle già viste) da predicati con n variabili libere si possono ottenere proposizioni aperte con un numero inferiore di variabili libere o addirittura enunciati.

Esempio 2.3.13

Dalla proposizione aperta su $\mathbb{N}$ $\qquad x + y = 5$

si ricavano i seguenti predicati su $\mathbb{N}$

$$\forall x(x+y=5)\ ; \quad \forall y(x+y=5)\ ; \quad \exists x(x+y=5)\ ; \quad \exists y(x+y=5)$$

e i seguenti enunciati su $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} \forall x \forall y(x+y=5)\ ; & \forall y \forall x(x+y=5)\ ; \\ \forall x \exists y(x+y=5)\ ; & \forall y \exists x(x+y=5)\ ; \\ \exists x \forall y(x+y=5)\ ; & \exists y \forall x(x+y=5)\ ; \\ \exists x \exists y(x+y=5)\ ; & \exists y \exists x(x+y=5) \end{array}$$

dei quali i primi sei sono falsi e gli ultimi due sono veri.

Osservazione 2.3.14

Si noti che in generale è essenziale l'ordine in cui si scrivono i quantificatori. Per esempio, se $\mathbf{p}(x, y)$ è un predicato binario su un insieme **A** qualunque, si ha che

$$\forall x\, \forall y\, \mathbf{p}(x, y) \ \sim\ \forall y\, \forall x\, \mathbf{p}(x, y) \qquad \text{e} \qquad \exists x\, \exists y\, \mathbf{p}(x, y) \ \sim\ \exists y\, \exists x\, \mathbf{p}(x, y)$$

mentre $\forall x\, \exists y\, \mathbf{p}(x, y)$ non ha in generale lo stesso valore di verità di $\exists y\, \forall x\, \mathbf{p}(x, y)$
e $\forall y\, \exists x\, \mathbf{p}(x, y)$ non ha in generale lo stesso valore di verità di $\exists x\, \forall y\, \mathbf{p}(x, y)$.

Esempio 2.3.15

La $\forall x\, \exists y\, (x < y)$ è vera in $\mathbb{N}$, mentre la $\exists y \forall x(x < y)$ è falsa in $\mathbb{N}$; analogamente, la $\exists x\, \forall y\, (x > y)$ è falsa in $\mathbb{N}$, mentre la $\forall y\, \exists x\, (x > y)$ è vera in $\mathbb{N}$.

Essendo falsa la $\exists y\, \forall x\, (x < y)$, è necessariamente vera la sua negazione. Ricordiamo che

$$\neg\,(\exists y\, \forall x\, (x < y)) \sim \forall y\, (\neg\,(\forall x\, (x < y))) \sim \forall y\, \exists x\, (\neg\,(x < y)) \sim \forall y\, \exists x\, (x \geq y);$$

in effetti, la proposizione $\forall y \exists x(x \geq y)$ è vera.

Esercizio 2.3.16

Per ciascuno dei seguenti enunciati, si dica se è vero o falso in $\mathbb{N}$, in $\mathbb{Z}$ e in $\mathbb{Q}$:

$$\forall x \exists y (x+y=6)\ ; \quad \forall x \forall y (x+y=6)\ ; \quad \exists x \forall y (x+y=6)\ ; \quad \exists x \exists y (x+y=6)\ ;$$
$$\forall x \exists y (xy=6)\ ; \quad \forall x \forall y (xy=6)\ ; \quad \exists x \forall y (xy=6)\ ; \quad \exists x \exists y (xy=6)\ ;$$
$$\forall x \exists y (xy=0)\ ; \quad \forall x \forall y (xy=0)\ ; \quad \exists x \forall y (xy=0)\ ; \quad \exists x \exists y (xy=0)\ .$$

2.4 - I teoremi, e come si dimostrano.

Chiamiamo "*teorema*" una proposizione vera. Molto spesso un teorema è un enunciato della forma
$$(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{Hp}(x) \Rightarrow \mathbf{Th}(x))$$
dove $\mathbf{Hp}(x)$ e $\mathbf{Th}(x)$ sono proposizioni aperte dette rispettivamente *ipotesi* e *tesi* del teorema; l'insieme **A** si dice talvolta *ambito di validità* del teorema. Un teorema di questa forma si esprime anche dicendo che $\mathbf{Hp}(x)$ è *condizione sufficiente* per $\mathbf{Th}(x)$ oppure, equivalentemente, che $\mathbf{Th}(x)$ è *condizione necessaria* per $\mathbf{Hp}(x)$; si dice anche che

$\mathbf{Th}(x)$ *se* $\mathbf{Hp}(x)$

oppure che

$\mathbf{Hp}(x)$ *solo se* $\mathbf{Th}(x)$.

Esempio 2.4.1

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\ ((x \text{ è multiplo di } 4) \Rightarrow (x \text{ è pari}))$$
è un teorema (cfr. esercizio 2.3.4). L'ipotesi è
$$\mathbf{Hp}(x) := \text{“}x \text{ è multiplo di } 4\text{”}\ ;$$
la tesi è
$$\mathbf{Th}(x) := \text{“}x \text{ è pari”}\ .$$
L'ambito di validità del teorema è $\mathbb{Z}$ (di fatto, fra gli insiemi numerici che conosciamo, $\mathbb{Z}$ è "il più ampio" in cui si usino le nozioni di "multiplo" e "pari"). Il teorema può essere enunciato nei seguenti modi, tutti equivalenti anche se non tutti ugualmente espressivi:

– Se un numero è multiplo di 4 allora è pari.

– Essere multiplo di 4 è condizione sufficiente per essere pari.

– Essere pari è condizione necessaria per essere multiplo di 4.

– Un numero è pari se è multiplo di 4.

– Un numero è multiplo di 4 solo se è pari.

Talvolta un teorema è invece della forma

$$(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{P}(x) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(x))$$

e si esprime dicendo che $\mathbf{P}(x)$ è *condizione necessaria e sufficiente* per $\mathbf{Q}(x)$ o anche che $\mathbf{Q}(x)$ *se e solo se* $\mathbf{P}(x)$. Ricordando il significato del simbolo $\Leftrightarrow$ e quanto visto in 2.3.10, un teorema di questa forma si trasforma in

$$(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)) \wedge (\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{Q}(x) \Rightarrow \mathbf{P}(x))$$

e quindi si dimostra assumendo prima come ipotesi $\mathbf{P}(x)$ e come tesi $\mathbf{Q}(x)$, poi come ipotesi $\mathbf{Q}(x)$ e come tesi $\mathbf{P}(x)$.

Esempio 2.4.2

$$(\forall x \in \mathbb{Q})\,((x = 0) \Leftrightarrow (x^2 = 0))$$

è un teorema che si può esprimere così:

– Condizione necessaria e sufficiente perché il quadrato di un numero sia 0 è che il numero stesso sia 0.

Oppure, equivalentemente:

– Il quadrato di un numero è 0 sse il numero stesso è 0.

L'ambito di validità del teorema è $\mathbb{Q}$; quando avremo introdotto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, vedremo che anche in $\mathbb{R}$ vale un analogo teorema; invece in (ad esempio) $\mathbb{Z}_4$ il quadrato di un numero diverso da zero può essere zero (cfr. 8.6.6).

Vediamo dunque come si può dimostrare che

$$(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{Hp}(x) \Rightarrow \mathbf{Th}(x)).$$

Sia $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$. Per quanto osservato in 2.2.4, per dimostrare che $\mathbf{Hp}(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{Th}(\mathbf{a})$ basta provare per certe opportune "proposizioni intermedie" $\mathbf{p_1}(\mathbf{a}), \mathbf{p_2}(\mathbf{a}), \ldots, \mathbf{p}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{a})$ che

$$\mathbf{Hp}(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{p_1}(\mathbf{a})\,, \quad \mathbf{p_1}(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{p_2}(\mathbf{a})\,, \quad \ldots\,, \quad \mathbf{p}_{\boldsymbol{n}}(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{Th}(\mathbf{a}).$$

Tuttavia, è qualche volta preferibile dimostrare non direttamente il teorema ma un enunciato che ha lo stesso valore di verità; ad esempio, ricordando 2.2.7 e 2.3.9, anziché $(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{Hp}(x) \Rightarrow \mathbf{Th}(x))$ si può dimostrare

$$(\forall x \in \mathbf{A})((\neg\, \mathbf{Th}(x)) \Rightarrow (\neg \mathbf{Hp}(x))).$$

Un caso particolarmente importante è quello delle *dimostrazioni per assurdo*.

Per dimostrare che è vera una proposizione α, si procede talvolta come segue. Sia $\mathbf{f}$ una proposizione falsa; se è vera la $(\neg\,\alpha) \Rightarrow \mathbf{f}$

allora è certamente vera α. Infatti per quanto abbiamo convenuto la proposizione $(\neg\,\alpha) \Rightarrow \mathbf{f}$ è vera se e soltanto se $\neg\,\alpha$ è falsa oppure $\mathbf{f}$ è vera; essendo $\mathbf{f}$ falsa, se è vera la proposizione $(\neg\,\alpha) \Rightarrow \mathbf{f}$ deve essere falsa la $(\neg\,\alpha)$ e dunque deve essere vera α.

Si noti che nel caso che α sia della forma

$$(\forall x \in \mathbf{A})\,(\mathbf{Hp}(x) \Rightarrow \mathbf{Th}(x))$$

per il teorema 2.3.6 la $\neg\,\alpha$ ha lo stesso valore di verità di

$$(\exists x \in \mathbf{A})\,(\neg\,(\mathbf{Hp}(x) \Rightarrow \mathbf{Th}(x)))$$

e dunque (cfr. esercizio 2.2.7) anche di

$$(\exists x \in \mathbf{A})\,(\mathbf{Hp}(x) \wedge (\neg\,\mathbf{Th}(x))).$$

"Tradotto" in linguaggio corrente ciò significa che per dimostrare che è vera la

$$(\forall x \in \mathbf{A})(\mathbf{Hp}(x) \Rightarrow \mathbf{Th}(x))$$

si può procedere come segue: si suppone che esista un $x \in \mathbf{A}$ per il quale è vera $\mathbf{Hp}(x)$ e non è vera $\mathbf{Th}(x)$, e se ne deduce la verità di una opportuna proposizione falsa $\mathbf{f}$.

Si noti comunque che, in generale, in un teorema possono intervenire più variabili; dunque quanto detto sopra va riferito con gli opportuni adattamenti anche a enunciati della forma

$$(\forall x_{\mathbf{1}} \in \mathbf{A_1})\,(\forall x_{\mathbf{2}} \in \mathbf{A_2}) \ldots\,(\forall x_{\boldsymbol{n}} \in \mathbf{A}_{\boldsymbol{n}})\,(\mathbf{Hp}(x_{\mathbf{1}}, x_{\mathbf{2}}, \ldots, x_{\boldsymbol{n}}) \Rightarrow \mathbf{Th}(x_{\mathbf{1}}, x_{\mathbf{2}}, \ldots, x_{\boldsymbol{n}})).$$

Osservazione 2.4.3

Nelle sezioni 2.2 e 2.3 abbiamo introdotto regole sintattiche piuttosto precise per la costruzione di proposizioni mediante l'uso di connettivi e quantificatori. Se però nel seguito di questi appunti formalizzassimo le definizioni e gli enunciati dei teoremi con lo stesso rigore, la lettura risulterebbe più pesante del necessario e in definitiva si perderebbe chiarezza. Limiteremo perciò l'effettiva adozione dei simboli logici, accettandone per di più un uso "discorsivo": ad esempio, scriveremo $(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ anziché, come rigorosamente si dovrebbe, $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(\forall y \in \mathbb{Z})\,(\forall z \in \mathbb{Z})\,((xy)z = x(yz))$. Sarà però un utile esercizio per il lettore scriversi ogni tanto la formulazione rigorosa degli enunciati che incontra; e ciò sarà comunque particolarmente opportuno nei casi in qualche modo problematici; ad esempio, quando si vogliano applicare le regole viste in 2.2 e 2.3 per ricavare equivalenze logiche, anche alla luce di quel che si è detto in questa sezione sulla dimostrazione dei teoremi.

2.5 - Dimostrazioni per induzione.

Supponiamo di dover provare che un predicato $\mathbf{P}(n)$ è vero per ogni numero naturale n. Si tratta in sostanza di dimostrare che l'insieme **A** dei numeri naturali n per i quali $\mathbf{P}(n)$ è vero coincide con $\mathbb{N}$; a tale scopo, per l'assioma (P3) di 1.5, basta mostrare che

– $0 \in \mathbf{A}$, ossia: $\mathbf{P}(0)$ è vero;

e che

– se $k \in \mathbf{A}$ allora anche il successivo di k appartiene ad **A**, ossia: supposto vero $\mathbf{P}(k)$ (la cosiddetta *ipotesi di induzione*), allora $\mathbf{P}(k+1)$ è vero.

$\boxed{\text{Esempio 2.5.1}}$

Dimostriamo per induzione su n che la somma dei numeri naturali non superiori a n è

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostrazione – L'affermazione è chiaramente vera per $n = 0$. Supponiamo allora (*ipotesi di induzione*) che sia $0 + 1 + 2 + \ldots + k \;=\; \frac{k(k+1)}{2}$

e dimostriamo che $\quad 0 + 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) \;=\; \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$

In effetti,

$$0 + 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

$\boxed{\text{Esempio 2.5.2}}$

Dimostriamo per induzione su n che la somma dei quadrati dei numeri naturali non superiori a n è

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dimostrazione – L'affermazione è chiaramente vera per $n = 0$. Supponiamo allora (*ipotesi di induzione*) che sia

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 \;=\; \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

e dimostriamo che

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \;=\; \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

In effetti,

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Esercizio 2.5.3

Si dimostri che la somma dei cubi dei numeri naturali non superiori a n è $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Esercizio 2.5.4

Si dimostri che la somma dei cubi di tre numeri naturali consecutivi è sempre divisibile per 9.

Suggerimento: Si dimostri che $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9h$ con h opportuno numero naturale, procedendo per induzione su n.

Talvolta si deve considerare un predicato $\mathbf{P}(n)$ che è vero solo per $n \geq n_0$ (n_0 numero naturale fissato). Si può applicare ugualmente il principio di induzione considerando il predicato $\mathbf{P}_1(n) = \mathbf{P}(n + n_0)$; ciò significa dover mostrare che

– $\mathbf{P}(n_0)$ è vero;

– supposto vero $\mathbf{P}(k)$, allora $\mathbf{P}(k+1)$ è vero.

Esercizio [*] 2.5.5

Trovare l'errore nella dimostrazione del seguente falso teorema.

"Comunque presi n numeri naturali $a_1, a_2, \ldots, a_n$, si ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$."

(*Falsa*) *dimostrazione* – Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$, si deve provare che $a_1 = a_1$, e questo è ovvio. Supponiamo allora (*ipotesi di induzione*) che per ogni insieme di k numeri naturali $a_1, a_2, \ldots, a_k$ si abbia $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$, e proviamo che

comunque scelti $k+1$ numeri naturali $b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}$ si ha $b_1 = b_2 = \ldots = b_{k+1}$.

Siano dunque dati $b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}$; applicando l'ipotesi di induzione ai k numeri naturali $b_1, b_2, \ldots, b_k$, si ha che $b_1 = b_2 = \ldots = b_k$; applicando ancora l'ipotesi di induzione ai k numeri naturali $b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}$, si ha che $b_2 = \ldots = b_k = b_{k+1}$; dunque gli elementi dell'insieme sono tutti uguali a (tanto per fissare le idee) b_k, e quindi sono tutti uguali fra loro, come si voleva dimostrare.

3.- COME SI DEFINISCE UN INSIEME

3.1 - Introduzione.

In questa sezione stabiliamo le “regole del gioco” per quando parliamo di insiemi, fissando quattro modi per indicarli. Ciò è importante non solo per esigenze di chiarezza, ma anche perché postuliamo “a priori” una volta per tutte l’esistenza di ogni insieme definito con tali criteri. Si dimostra che la teoria così costruita non è contraddittoria.

3.2 - Definizione mediante elenco degli elementi.

Accetteremo di definire un insieme indicandone tra parentesi graffe tutti gli elementi ([7]) separati da virgole (si ricordi che abbiamo stabilito che un insieme è completamente caratterizzato dai suoi elementi). Ad esempio, se $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$ sono tutti e soli gli elementi dell’insieme **A**, scriveremo

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}.$$

Si noti che questo tipo di definizione può essere adottato solo per gli insiemi che hanno un numero finito di elementi.

Esempi

3.2.1 $\mathbf{A} = \{1, 5, 23, 49, 76\}$;

3.2.2 $\mathbf{B} = \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$ (si osservi che $\mathbb{N} \in \mathbf{B}$ ma $\mathbb{N} \not\subset \mathbf{B}$) ;

3.2.3 $\mathbf{C} = \{5, 37, \mathbb{N}, \mathbb{Q}^+\}$;

3.2.4 $\mathbf{D} = \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$. Gli insiemi $\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}, \{\{\mathbb{N}\}\}, \{\{\{\mathbb{N}\}\}\}, \ldots$ sono tutti distinti fra loro.

---

[7] che possono essere elementi di insiemi già definiti, oppure insiemi essi stessi.

3.3 - Definizione mediante una proprietà caratteristica.

Sia **B** un insieme. Accetteremo di definire un sottoinsieme **A** di **B** specificando una proprietà che ne caratterizza gli elementi fra tutti gli elementi di **B**. Precisamente, se $\mathbf{p}(x)$ è una proposizione aperta con variabile libera x su **B** (cfr. 2.3), scriveremo

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{B} \,/\, \mathbf{p}(x)\}$$

(si legge: **A** è l'insieme degli x appartenenti a **B** tali che $\mathbf{p}(x)$) per indicare il sottoinsieme di **B** formato da tutti e soli gli elementi per i quali $\mathbf{p}(x)$ è vera. Come vedremo (3.3.3), è essenziale che **A** sia "immerso" in un insieme **B** già definito.

Esempio 3.3.1

L'insieme dei numeri naturali il cui quadrato non supera 200 può essere indicato scrivendo

$$\{x \in \mathbb{N} \,/\, x^2 \leq 200\}.$$

Teorema 3.3.2

Esiste un (unico) insieme che non ha elementi; esso si dice *insieme vuoto* e si indica con $\emptyset$. Per ogni insieme **I**, si ha $\emptyset \subset \mathbf{I}$.

Dimostrazione – Sia **A** un qualunque insieme; allora l'insieme $\emptyset := \{x \in \mathbf{A} \,/\, x \neq x\}$ esiste (perché è definito come convenuto in 3.3) e non ha elementi (perché $x \neq x$ è falso qualunque sia x).

Sia ora **I** un insieme. Dobbiamo provare che $\emptyset \subset \mathbf{I}$, ossia che $(\forall x \in \emptyset)\,(x \in \mathbf{I})$. Per quanto visto nelle osservazioni 2.2.5 e 2.3.6, questo enunciato ha lo stesso valore di verità di

$$\neg\,(\neg\,((\forall x \in \emptyset)\,(x \in \mathbf{I}))) \quad \text{e di} \quad \neg\,((\exists x \in \emptyset)\,(x \notin \mathbf{I})).$$

Ma quest'ultima proposizione è certamente vera, perché in $\emptyset$ non ci sono elementi.

In particolare, esiste un solo insieme vuoto (anche se può essere definito come sopra a partire da insiemi **A** diversi). Un insieme distinto da $\emptyset$ sarà detto *non vuoto*.

Teorema 3.3.3

Non esiste un "insieme di tutti gli insiemi", cioè: non esiste un insieme di cui ogni insieme sia elemento.

Dimostrazione – Sia per assurdo **U** l'insieme di tutti gli insiemi, e si consideri

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{U} \,/\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}.$$

Se fosse $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$, per definizione di **A** sarebbe $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$, e ciò è assurdo. Allora $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$; ma poiché $\mathbf{A} \in \mathbf{U}$ ne segue $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$, assurdo. Se si accetta il postulato di esistenza degli insiemi definiti come in 3.3, bisogna dunque negare l'esistenza dell'insieme **U**.

Lo stesso paradosso, dovuto a B. Russel, mostra perché nella definizione di **A** mediante una proprietà caratteristica abbiamo dovuto chiedere che **A** fosse sottoinsieme di un insieme **X**.

Esercizio [*] 3.3.4

Fissato un insieme **B**, si consideri $\mathbf{A} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{B} \,/\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$. Perché non c'è contraddizione? Può essere $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$? Può essere $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$? Può essere $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$?

3.4 - Definizione come unione di insiemi già definiti.

Sia $\mathcal{I}$ un insieme di insiemi. Esiste un insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi degli insiemi che appartengono a $\mathcal{I}$.

Tale insieme si indica con $\cup\mathcal{I}$ e si dice *unione* degli insiemi che costituiscono $\mathcal{I}$: ci torneremo sopra in 3.6.

3.5 - L'insieme delle parti.

Sia **A** un insieme. Esiste un insieme i cui elementi sono tutti (e soli) i sottoinsiemi di **A**; esso si indica con $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ e si dice *insieme delle parti di* **A**.

Si osservi che, per ogni insieme **A**, a $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ appartengono $\emptyset$ e **A**.

Esempio 3.5.1

Sia $\mathbf{A} = \{1,2,3\}$. Allora

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \{\ \mathbf{A}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

3.6 - Unione, intersezione, differenza.

Siano **A**, **B** insiemi.

Si dice *unione* di **A** e **B**, e si indica con $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, l'insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di **A** e gli elementi di **B**. Con la notazione introdotta in 3.4: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \ \cup\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$.

Si dice *intersezione* di **A** e **B**, e si indica con $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, l'insieme degli elementi di **A** che appartengono anche a **B**. Con la notazione introdotta in 3.3: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A} \,/\, x \in \mathbf{B}\}$.

Se $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, **A** e **B** si dicono *disgiunti*.

Si dice *differenza* di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e si indica con $\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}$, l'insieme degli elementi di $\mathbf{A}$ che non appartengono a $\mathbf{B}$. Con la notazione introdotta in 3.3: $\mathbf{A}\backslash\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A}\ /\ x \notin \mathbf{B}\}$.

Se $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, l'insieme $\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}$ viene detto anche *complementare* di $\mathbf{B}$ in $\mathbf{A}$, ed è indicato (purché tale notazione non dia luogo ad equivoci) con $\mathbf{B}^c$.

$\boxed{\text{Esempio 3.6.1}}$

Siano $\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{B} = \{2, 4, 6, 8\}$. Allora $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{2\}$ e $\mathbf{A}\backslash\mathbf{B} = \{1, 3\}$.

$\boxed{\text{Esempio 3.6.2}}$

Siano $\mathbf{A}$ l'insieme dei triangoli e $\mathbf{B}$ l'insieme dei rettangoli (entrambi sottoinsiemi del piano euclideo). Allora $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.

$\boxed{\text{Esercizi}}$

Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sottoinsiemi dell'insieme $\mathbf{I}$. Si dimostrino le seguenti uguaglianze:

$\boxed{3.6.3}$ $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$;

$\boxed{3.6.4}$ $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$;

$\boxed{3.6.5}$ $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$;

$\boxed{3.6.6}$ $\mathbf{A} \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{A}$;

$\boxed{3.6.7}$ $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^c = \mathbf{A}^c \cup \mathbf{B}^c$;

$\boxed{3.6.8}$ $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})\backslash(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = (\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}) \cup (\mathbf{B}\backslash\mathbf{A})$.

Valgono le uguaglianze che si ottengono dalle precedenti scambiando $\cap$ con $\cup$?

$\boxed{\text{Esercizi}}$

Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sottoinsiemi dell'insieme $\mathbf{I}$. Si dimostrino le seguenti uguaglianze:

$\boxed{3.6.9}$ $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c = \mathbf{A}\backslash\mathbf{B}$;

$\boxed{3.6.10}$ $\mathbf{A}\backslash(\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$;

$\boxed{3.6.11}$ $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B}\backslash\mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})\backslash(\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$;

Valgono le uguaglianza che si ottengono dalle precedenti scambiando $\cap$ con $\cup$?

3.7 - Unione e intersezione di una famiglia di insiemi. Partizioni.

Un insieme di insiemi si dice anche *una famiglia* di insiemi. Abbiamo definito in 3.4 l'*unione* di una famiglia di insiemi; in modo analogo si definisce l'*intersezione* di una famiglia *non vuota* di insiemi (l'esistenza dell'insieme intersezione è garantita dal fatto che esso si può definire secondo la regola fissata in 3.3 come l'insieme degli elementi di un insieme della famiglia che appartengono anche a tutti gli altri insiemi della famiglia).

Sia **A** un insieme.

Una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di **A** (eventualmente anche in numero infinito) si dice una *partizione* di **A** se essi sono a due a due disgiunti e la loro unione è **A**.

Esempio 3.7.1

Un fascio di rette parallele è una partizione del piano.

3.8 - Prodotto cartesiano.

Siano **A**, **B** insiemi.

Se $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$, sappiamo (per quanto convenuto in 3.2) che possiamo considerare l'insieme $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ($\subset \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$); spesso è però opportuno considerare un ente che sia caratterizzato non solo dai suoi elementi ma anche dall'ordine in cui si considerano: tale ente si dice *coppia ordinata* ([8]) *con prima componente* **a** *e seconda componente* **b**, e si indica con $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Si noti che

– se $\mathbf{a}, \mathbf{a'} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{b}, \mathbf{b'} \in \mathbf{B}$, si ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a'}, \mathbf{b'})$ se e solo se $\mathbf{a} = \mathbf{a'}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{b'}$;

in particolare:

– se $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, si ha sempre $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq (\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

L'insieme di tutte le coppie ordinate $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ con $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ si dice *prodotto cartesiano* ([9]) di **A** per **B** e si indica con $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Esempio 3.8.1

Sia $\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbf{B} = \{0, 1\}$. Si ha $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$.

---

[8] La definizione rigorosa di *coppia ordinata* è la seguente: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, \mathbf{a}\}$.

[9] Tenendo conto della nota precedente, il lettore attento potrà osservare che $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}))$, e quindi può essere definito come in 3.3; ciò, assieme a quanto postulato in 3.5, ne garantisce l'esistenza.

3.9 - n-ple ordinate. Matrici.

Come si è fatto in 3.8 per la coppia ordinata, si può considerare un ente caratterizzato da 3, 4, $\ldots$, n elementi, detti *componenti* (appartenenti a certi insiemi prefissati), e dall'ordine in cui questi vengono considerati: si parla rispettivamente di *terna ordinata*, *quaterna ordinata*, $\ldots$, *n-pla ordinata*.

Si tratta in sostanza di iterare il procedimento di costruzione delle coppie ordinate. Siano $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ insiemi e siano $\mathbf{a}_1 \in \mathbf{A}_1$, $\mathbf{a}_2 \in \mathbf{A}_2$, $\mathbf{a}_3 \in \mathbf{A}_3$: la terna ordinata individuata da $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ (in questo ordine) si indica con $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ e non è altro che l'elemento $((\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \mathbf{a}_3)$ dell'insieme $(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \times \mathbf{A}_3$ (che, per semplicità, si indica a sua volta con $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3$). Particolare importanza rivestirà per noi il caso delle n-ple ordinate di elementi di uno stesso insieme $\mathbf{A}$ (l'insieme di tali n-ple si indica con $\mathbf{A}^n$).

Sia $\mathbf{A}$ un insieme, e siano m, n numeri interi positivi. Si dice *matrice $m \times n$ a elementi in* $\mathbf{A}$ una m-pla ordinata di n-ple ordinate di elementi di $\mathbf{A}$, ossia un elemento di $(\mathbf{A}^n)^m$. Una matrice $m \times n$ potrebbe essere identificata con una mn-pla ordinata; in pratica, quando si parla di matrice gli elementi vengono scritti in una "tabella"

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_{1,2} & \ldots & \mathbf{a}_{1,n} \\ \mathbf{a}_{2,1} & \mathbf{a}_{2,2} & \ldots & \mathbf{a}_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_{m,1} & \mathbf{a}_{m,2} & \ldots & \mathbf{a}_{m,n} \end{pmatrix}$$

nella quale si evidenziano le n-ple ordinate $(\mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{1,2}, \ldots, \mathbf{a}_{1,n})$, $\ldots$, $(\mathbf{a}_{2,1}, \mathbf{a}_{2,2}, \ldots, \mathbf{a}_{2,n})$, $\ldots$, $(\mathbf{a}_{m,1}, \mathbf{a}_{m,2}, \ldots, \mathbf{a}_{m,n})$, dette *righe* della matrice, e le m-ple ordinate $(\mathbf{a}_{1,1}, \mathbf{a}_{2,1}, \ldots, \mathbf{a}_{m,1})$, $\ldots$, $(\mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{a}_{2,2}, \ldots, \mathbf{a}_{m,2})$, $\ldots$, $(\mathbf{a}_{1,n}, \mathbf{a}_{2,n}, \ldots, \mathbf{a}_{m,n})$, dette *colonne* della matrice. Sinteticamente, la matrice di termine generico $\mathbf{a}_{i,j}$ si indica con $(\mathbf{a}_{i,j})$; le sue righe si indicano con $\mathbf{a}_{1,*}$, $\mathbf{a}_{2,*}$, $\ldots$, $\mathbf{a}_{m,*}$ e le sue colonne con $\mathbf{a}_{*,1}$, $\mathbf{a}_{*,2}$, $\ldots$, $\mathbf{a}_{*,n}$.

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a elementi in $\mathbf{A}$ si indica con $\mathbf{A}^{m,n}$.

4.- FUNZIONI

4.1 - Relazioni.

Siano **A**, **B** insiemi.

Si dice *relazione* tra **A** e **B** un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Sia ϱ una relazione tra **A** e **B**, cioè sia $\varrho \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$; se $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \varrho$, si dice che gli elementi **a** (di **A**) e **b** (di **B**) *sono in relazione,* e si scrive $\mathbf{a}\varrho\mathbf{b}$. In pratica si usa sempre la notazione $\mathbf{a}\varrho\mathbf{b}$ anziché $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \varrho$.

Intuitivamente, una relazione tra **A** e **B** è una "legge" che a ogni elemento di **A** associa qualche elemento di **B** (eventualmente nessuno).

Esempio 4.1.1

Siano

$$\mathbf{A} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101\};$$

$$\mathbf{B} := \{n \in \mathbb{N} / \ 1 \leq n \leq 100\}.$$

Si ponga per $p \in \mathbf{A}$ e $n \in \mathbf{B}$

$$p\varrho n \quad \text{se e solo se} \quad p \text{ è un divisore di } n.$$

Si è così definita una relazione ϱ tra **A** e **B**; si noti che alcuni elementi di **A** sono in relazione con un solo elemento di **B** (è quanto accade considerando $p := 53, 59, \ldots, 97$), altri ($p := 37$, 41, 43, 47) con due, altri ($p := 29$, 31) con tre, ecc.. L'elemento 2 di **A** è in relazione con 50 elementi di **B**; l'elemento 101 di **A** non è in relazione con alcun elemento di **B**. Inoltre: più elementi di **A** possono essere in relazione con gli stessi elementi di **B** (2, 3, 5 sono tutti in relazione con 30, 60 e 90).

Esempio 4.1.2

Sia **A** un insieme, e si ponga per $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}$

$$\mathbf{a}\varrho\mathbf{X} \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{X}.$$

Si è così definita una relazione ϱ tra **A** e $\mathcal{P}(\mathbf{A})$.

4.2 - Funzioni.

Siano **A**, **B** insiemi.

Una relazione **f** tra **A** e **B** si dice una *funzione* (o *applicazione*) da **A** in **B** se per ogni **a** $\in$ **A** esiste al più un **b** $\in$ **B** tale che **a f b**, cioè se ogni elemento di **A** è in relazione (secondo **f**) con al più un elemento di **B**. Ciò si esprime scrivendo

$$\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

Intuitivamente, una funzione da **A** in **B** è una "legge" che a certi elementi di **A** associa uno e un solo elemento di **B** (e ai restanti elementi di **A** non associa niente).

Esempio 4.2.1

Sia **A** l'insieme $\mathbb{Q}^+$dei numeri razionali positivi, e sia **B** l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. La "legge" che al numero razionale $\frac{m}{n}$ associa il numero naturale $m+n$ non è una funzione $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ (si dice anche, impropriamente, che non è ben definita come funzione). Infatti, ad esempio, al numero razionale $\frac{2}{3}$ (che si può scrivere anche $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, ecc.) vengono associati non solo il numero naturale 5 $(=2+3)$ ma anche i numeri naturali 10 $(=4+6)$, 15 $(=6+9)$, 20 $(=8+12)$, ecc.. La legge considerata fornisce invece un esempio significativo di relazione tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$; oppure individua una funzione dall'insieme delle frazioni in $\mathbb{N}$.

4.3 - Dominio. Immagine, immagine inversa. Punti fissi.

Sia **f** una funzione da **A** in **B**.

L'insieme degli elementi di **A** che sono in relazione (secondo **f**) con un elemento di **B** si dice *dominio* di **f**, e si indica con $\mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Per ogni **a** $\in \mathcal{D}(\mathbf{f})$, l'(unico) elemento **b** di **B** tale che **a f b** si indica con $\mathbf{f}(\mathbf{a})$; si dice che **b** *proviene* da **a** (o anche che **b** è l'*immagine* di **a**) mediante **f**. Si scrive sempre $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ anziché **a f b**.

Se $\mathbf{A_1} \subset \mathbf{A}$, si dice *immagine* di $\mathbf{A_1}$ (mediante **f**) il sottoinsieme $\mathbf{f}(\mathbf{A_1})$ di **B** formato dalle immagini (mediante **f**) degli elementi di $\mathbf{A_1}$; con la notazione di 3.3,

$$\mathbf{f}(\mathbf{A_1}) = \{\mathbf{b} \in \mathbf{B} \,/\, \mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \text{ per qualche } \mathbf{a} \in \mathbf{A_1}\}.$$

Si noti che può essere $\mathbf{f}(\mathbf{A_1}) = \emptyset$ (ciò avviene se e solo se nessun elemento di $\mathbf{A_1}$ appartiene a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$).

L'immagine $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ di **A** (che coincide ovviamente con l'immagine del dominio di **f**) si dice anche semplicemente *immagine di* **f**.

Se $\mathbf{B_1} \subset \mathbf{B}$, si dice *immagine inversa* di $\mathbf{B_1}$ (mediante **f**) il sottoinsieme $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B_1})$ di **A** formato dagli elementi le cui immagini (mediante **f**) appartengono a $\mathbf{B_1}$; con la notazione di 3.3, $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B_1}) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathbf{B_1}\}$.

Sia $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, cioè sia **f** una funzione da **A** in **A**. Un elemento **a** di **A** si dice un *punto fisso* per **f** se $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.

Esempio 4.3.1

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^+$ la funzione che al numero intero n associa (se esiste) il reciproco del quadrato di n.
Ciò si indica con l'espressione $\mathbf{f}(n) := \dfrac{1}{n^2}$.
Si ha che:

- (i) il dominio di **f** è $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- (ii) l'immagine di **f** è un insieme di numeri razionali compresi fra 0 e 1;
- (iii) posto $\mathbf{A_1} := \{n \in \mathbb{Z} / -2 \le n \le +2\}$, si ha $\mathbf{f}(\mathbf{A_1}) = \{1, \frac{1}{4}\}$;
- (iv) posto $\mathbf{B_1} := \{n \in \mathbb{Q}^+ / n \ge 1\}$, si ha $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B_1}) = \{-1, +1\}$.

Esercizi [*]

Sia $\mathbf{f}:\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, e siano $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2} \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dimostri che:

4.3.2 $(\mathbf{A_1} \subset \mathbf{A_2}) \Rightarrow (\mathbf{f}(\mathbf{A_1}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{A_2}))$;

4.3.3 $\mathbf{f}(\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2}) = \mathbf{f}(\mathbf{A_1}) \cup \mathbf{f}(\mathbf{A_2})$;

4.3.4 $\mathbf{f}(\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{A_1}) \cap \mathbf{f}(\mathbf{A_2})$.

Si mostri inoltre con un esempio che può essere $\mathbf{f}(\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2}) \subsetneq \mathbf{f}(\mathbf{A_1}) \cap \mathbf{f}(\mathbf{A_2})$.

4.4 - Iniettività e suriettività.

Siano **A**, **B** insiemi, e sia $\mathbf{f}:\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Se per ogni $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ esiste almeno un $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ (cioè se ogni elemento di **B** proviene mediante **f** da almeno un elemento di **A**; ossia se $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$), **f** si dice *suriettiva*. In tal caso, si dice che **f** è una funzione da **A** su **B**.

Se comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{a'} \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{a'}$ è $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{a'})$ (ossia se comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{a'} \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ da $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a'})$ segue $\mathbf{a} = \mathbf{a'}$; cioè se ogni elemento di **B** proviene da al più un elemento di **A**), **f** si dice *iniettiva*.

Se **f** è iniettiva e suriettiva si dice che **f** è *biiettiva* (o anche che **f** è una *biiezione*). Se **f** è biiettiva e inoltre $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \mathbf{A}$, si dice che **f** è una *corrispondenza biunivoca tra* **A** *e* **B**. Una funzione iniettiva è sempre una corrispondenza biunivoca tra il proprio dominio e la propria immagine.

Una corrispondenza biunivoca tra **A** e **A** si dice *permutazione* su **A**.

Esempi

4.4.1 La funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che ad ogni numero associa il suo doppio è iniettiva ma non suriettiva: $\mathbf{f}(\mathbb{N})$ è l'insieme dei numeri naturali pari.

4.4.2 La funzione $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ che ad ogni numero associa il suo valore assoluto è suriettiva ma non iniettiva.

4.4.3 Per ogni insieme **A**, la funzione $\mathbf{id_A} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ che ad ogni elemento associa se stesso è una corrispondenza biunivoca detta *funzione identica* o anche *identità* di **A**. Ogni elemento di **A** è un punto fisso per $\mathbf{id_A}$.

4.4.4 Sia $\mathcal{R}$ una retta (cfr 1.4). La funzione $\mathbb{N} \to \mathcal{R}$ che ad ogni numero naturale associa un punto di $\mathcal{R}$ determinato come si è detto in 1.6 è iniettiva, e dunque stabilisce una biiezione tra $\mathbb{N}$ e un sottoinsieme di $\mathcal{R}$. Più in generale, l'idea intuitiva di "rappresentazione sulla retta di un insieme numerico" si traduce formalmente appunto nello stabilire una biiezione tra tale insieme numerico ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \dots$) e un sottoinsieme di $\mathcal{R}$.

4.5 - Restrizione a un sottoinsieme.

Siano **A**, **B** insiemi, sia $\mathbf{f}:\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e sia $\mathbf{A_1} \subset \mathbf{A}$. Si dice *restrizione* di **f** ad $\mathbf{A_1}$ la funzione $\mathbf{f}|_{\mathbf{A_1}} : \mathbf{A_1} \to \mathbf{B}$ così definita: $\mathbf{f}|_{\mathbf{A_1}} := \mathbf{f} \cap (\mathbf{A_1} \times \mathbf{B})$
(si ricordi che **f** è un sottoinsieme di $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$).

Questa definizione è molto "tecnica", perché nella sostanza $\mathbf{f}|_{\mathbf{A_1}}$ opera esattamente come **f** (l'unica differenza è che opera solo su $\mathbf{A_1}$); certe proprietà possono però essere verificate da $\mathbf{f}|_{\mathbf{A_1}}$ e non da **f**, e viceversa.

Esempio 4.5.1

La funzione $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che ad ogni numero associa il suo quadrato non è iniettiva né suriettiva; la sua restrizione a $\mathbb{Z}^+$ è iniettiva ma non suriettiva.

4.6 - La funzione inversa.

Siano **A**, **B** insiemi, e sia $\mathbf{f}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ iniettiva. Per ogni $\mathbf{b}\in\mathbf{f}(\mathbf{A})$, $\mathbf{f}^{-1}(\{\mathbf{b}\})$ non è vuoto (per definizione di $\mathbf{f}(\mathbf{A})$) ed è formato da al più un elemento (perché per ipotesi **f** è iniettiva), dunque è formato da esattamente un elemento; la legge che associa a **b** tale elemento è una funzione $\mathbf{B}\to\mathbf{A}$ (il cui dominio coincide con l'immagine di **f**) che si dice *funzione inversa* della **f** e si indica con $\mathbf{f}^{-1}$. In altri termini, $\mathbf{f}^{-1}$ si definisce ponendo, per ogni $\mathbf{b}\in\mathbf{f}(\mathbf{A})$,

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{b}) := \text{l'unico elemento di } \mathbf{f}^{-1}(\{\mathbf{b}\})$$

(il significato del simbolo $\mathbf{f}^{-1}$ nell'espressione a destra è quello fissato in 4.3).

È facile vedere che $\mathbf{f}^{-1}$ è una corrispondenza biunivoca tra l'immagine di **f** e il dominio di **f**; ne segue che, in particolare, l'inversa di una corrispondenza biunivoca $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ è una corrispondenza biunivoca $\mathbf{B}\to\mathbf{A}$.

Esempio 4.6.1

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ definita da $\qquad \mathbf{f}(x) := \frac{1}{3x+5}$.

È facile verificare che **f** è iniettiva (non è invece suriettiva: $0\notin\mathbf{f}(\mathbb{Q})$). La funzione inversa si può esprimere scrivendo $\qquad \mathbf{f}^{-1}(x) := \frac{1-5x}{3x}$

e si ha $\mathcal{D}(\mathbf{f}^{-1}) = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

4.7 - Composizione di funzioni.

Siano **A**, **B**, **C** insiemi, e siano $\mathbf{f}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, $\mathbf{g}:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ funzioni.

Si dice *composizione* di **f** con **g** e si indica con $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ (attenzione all'ordine in cui si scrivono **f** e **g**!) la funzione $\mathbf{A}\to\mathbf{C}$ definita ponendo

$$(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{a}) := \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \qquad \forall\mathbf{a}\in\mathbf{A} \text{ tale che } \mathbf{f}(\mathbf{a})\in\mathcal{D}(\mathbf{g}).$$

Esempi

4.7.1 Sia $\mathbf{f}:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ definita da $\mathbf{f}(n) := \frac{1}{n}$, e sia $\mathbf{g}:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ definita da $\mathbf{g}(x) := x+2$. Si ha

$$(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(n) := \frac{2n+1}{n} \ .$$

4.7.2 Sia $\mathbf{f}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definita da $\mathbf{f}(n) := n^2$, e sia $\mathbf{g}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definita da $\mathbf{g}(x) := x+1$. Si ha

$$(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(n) := n^2+1 \ , \qquad (\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(n) := n^2+2n+1.$$

Teorema 4.7.3

Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ insiemi, e sia $\mathbf{f}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ iniettiva. Sia $\mathbf{f}^{-1}:\mathbf{B}\to\mathbf{A}$ la funzione inversa di $\mathbf{f}$ definita in 4.6. Si ha $\mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{f} = \mathbf{id}_{\mathcal{D}(\mathbf{f})}$ e $\mathbf{f}\circ\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{id}_{\mathbf{f}(\mathbf{A})}$.

Dimostrazione — Sia $\mathbf{a}\in\mathcal{D}(\mathbf{f})$, e sia $\mathbf{f}(\mathbf{a})=\mathbf{b}$ con $\mathbf{b}\in\mathbf{B}$.
Allora $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{b})=\mathbf{a}$, e dunque

$$(\mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{f})(\mathbf{a}) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} = \mathbf{id}_{\mathcal{D}(\mathbf{f})}(\mathbf{a}).$$

Per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$ in $\mathbf{A}$, si è così provato ([10]) che $\mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{f} = \mathbf{id}_{\mathcal{D}(\mathbf{f})}$.

Sia ora $\mathbf{b}\in\mathbf{f}(\mathbf{A})$, e sia $\mathbf{a}$ l'elemento di $\mathbf{A}$ per il quale si ha $\mathbf{f}(\mathbf{a})=\mathbf{b}$. Allora $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{b})=\mathbf{a}$, e dunque $(\mathbf{f}\circ\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{b})) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b} = \mathbf{id}_{\mathbf{f}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$
cosicché l'asserto è completamente provato.

Teorema 4.7.4

Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ insiemi, e siano $\mathbf{f}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, $\mathbf{g}:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$, $\mathbf{h}:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ funzioni Si ha

$$(\mathbf{h}\circ\mathbf{g})\circ\mathbf{f} = \mathbf{h}\circ(\mathbf{g}\circ\mathbf{f}).$$

Dimostrazione — Sia $\mathbf{a}\in\mathcal{D}((\mathbf{h}\circ\mathbf{g})\circ\mathbf{f})$. Allora $\mathbf{a}\in\mathcal{D}(\mathbf{f})$ e $\mathbf{f}(\mathbf{a})\in\mathcal{D}(\mathbf{h}\circ\mathbf{g})$, da cui $\mathbf{f}(\mathbf{a})\in\mathcal{D}(\mathbf{g})$ (cosicché $\mathbf{a}\in\mathcal{D}(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})$) e $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\in\mathcal{D}(\mathbf{h})$. Pertanto $\mathbf{a}\in\mathcal{D}(\mathbf{h}\circ(\mathbf{g}\circ\mathbf{f}))$. Si ha inoltre $((\mathbf{h}\circ\mathbf{g})\circ\mathbf{f})(\mathbf{a}) = (\mathbf{h}\circ\mathbf{g})(\mathbf{f}(\mathbf{a})) = \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))) = \mathbf{h}((\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{a})) = (\mathbf{h}\circ(\mathbf{g}\circ\mathbf{f}))(\mathbf{a})$.
Sia infine $\mathbf{a}\notin\mathcal{D}((\mathbf{h}\circ\mathbf{g})\circ\mathbf{f})$. Allora $\mathbf{a}\notin\mathcal{D}(\mathbf{f})$ oppure $\mathbf{f}(\mathbf{a})\notin\mathcal{D}(\mathbf{h}\circ\mathbf{g})$, cioè $\mathbf{f}(\mathbf{a})\notin\mathcal{D}(\mathbf{g})$ oppure $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\notin\mathcal{D}(\mathbf{h})$. Se $\mathbf{a}\notin\mathcal{D}(\mathbf{f})$ oppure $\mathbf{f}(\mathbf{a})\notin\mathcal{D}(\mathbf{g})$, è $\mathbf{a}\notin\mathcal{D}(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})$; altrimenti è $(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{a})\notin\mathcal{D}(\mathbf{h})$. In ogni caso, $\mathbf{a}\notin\mathcal{D}(\mathbf{h}\circ(\mathbf{g}\circ\mathbf{f}))$ e l'asserto è completamente provato.

Esercizio 4.7.5

Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ insiemi, e siano $\mathbf{f}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, $\mathbf{g}:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ funzioni biiettive. Si provi che $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ è biiettiva.

Esercizio 4.7.6

Sia $\mathbf{A}$ un insieme, e siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ funzioni $\mathbf{A}\to\mathbf{A}$; sia $\mathbf{a}\in\mathbf{A}$. Si dimostri che se $\mathbf{a}$ è punto fisso per $\mathbf{f}$ e per $\mathbf{g}$ allora $\mathbf{a}$ è punto fisso anche per $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$.

---

[10] Che cosa significa per due funzioni “essere uguali”? Ricordiamo le definizioni date in 4.1 e 4.2: una “funzione” è un particolare insieme di coppie ordinate. Poiché (cfr. 1.3) due insiemi “sono uguali” (cioè coincidono) se e solo se hanno gli stessi elementi, due funzioni -in particolare- sono uguali se e solo se sono costituite dalle stesse coppie ordinate, ossia “operano allo stesso modo” su ogni elemento dell'insieme di partenza.

È importante avere ben chiaro che questa non è una definizione *ad hoc* di uguaglianza tra funzioni, ma solo un modo “specialistico” di esprimere la nozione di uguaglianza tra insiemi.

5.- RELAZIONI DI ORDINE

5.1 - Definizioni.

Sia $\mathbf{A}$ un insieme.

Si dice *relazione* in $\mathbf{A}$ una relazione tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$ (cioè un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$).

Sia ϱ una relazione in $\mathbf{A}$. Essa si dice

– *riflessiva* sse $\mathbf{a}\varrho\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{A}$;

– *simmetrica* sse $\mathbf{a}\varrho\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b}\varrho\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$;

– *antisimmetrica* sse $(\mathbf{a}\varrho\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}\varrho\mathbf{a}) \Rightarrow (\mathbf{a} = \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$;

– *transitiva* sse $(\mathbf{a}\varrho\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}\varrho\mathbf{c}) \Rightarrow (\mathbf{a}\varrho\mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{A}$.

Sia ϱ una relazione in $\mathbf{A}$. Due elementi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$ si dicono *confrontabili* (secondo ϱ) se si verifica almeno una delle seguenti situazioni: $\mathbf{a}\varrho\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\varrho\mathbf{a}$. La relazione ϱ si dice *totale* sse comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$ essi sono confrontabili.

Esempi

5.1.1 Per ogni insieme $\mathbf{A}$, la relazione "vuota" (secondo la quale nessun elemento è in relazione con alcun elemento: si tratta di $\emptyset$ pensato come sottoinsieme di $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$) è simmetrica, antisimmetrica e transitiva (ma non riflessiva).

5.1.2 La relazione ϱ in $\mathbb{Q}$ definita ponendo $a\varrho b$ sse $|\, a - b \,| < 1$ è riflessiva e simmetrica ma non transitiva.

5.1.3 La relazione ϱ nell'insieme dei cerchi del piano definita ponendo

$$\mathcal{C}_1 \varrho \mathcal{C}_2 \quad \text{sse} \quad \text{l'area di } \mathcal{C}_1 \text{ è minore o uguale all'area di } \mathcal{C}_2$$

è riflessiva, transitiva e totale ma non simmetrica né antisimmetrica. Per quest'ultima affermazione, si osservi che se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ hanno la stessa area essi sono *congruenti* ma non è in generale $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, cioè non sono in generale uguali!.

5.1.4 La relazione ϱ in $\mathbb{N}$ definita ponendo

$$a\varrho b \quad \text{sse} \quad a, b \text{ sono entrambi pari}$$

è simmetrica e transitiva ma non riflessiva (non è infatti, ad es., $1\varrho 1$).

5.2 - Relazioni di ordine.

Sia **A** un insieme.

Una relazione in **A** si dice una *relazione di ordine* in **A** se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Una relazione di ordine in **A** si indica spesso con $\preceq$ oppure con $\leq$ (quest'ultimo simbolo, in caso di ambiguità, è riservato alla relazione di "minore o uguale" in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, cfr. 1.6, 1.7 e 1.8).

Sia $\preceq$ una relazione di ordine in **A**, e siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$. Se $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$, si dice che **a** *precede* **b** (secondo $\preceq$); si usa anche la scrittura $\mathbf{b} \succeq \mathbf{a}$, che si considera equivalente.

Se una relazione di ordine in **A** non è totale e si vuol mettere in rilievo questo fatto, si dice che è *parziale*. In tal caso, esistono in **A** almeno due elementi che non sono confrontabili.

Esempi

5.2.1 L'usuale relazione di "minore o uguale" è una relazione di ordine totale in $\mathbb{Q}$.

5.2.2 La relazione di "divisibilità" tra numeri naturali è una relazione di ordine parziale in $\mathbb{N}$.

5.2.3 La relazione di "inclusione" tra sottoinsiemi di un dato insieme **I** è una relazione di ordine parziale nell'insieme $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ definito in 3.5.

Una relazione ϱ in **A** si dice una *relazione di ordine stretto* in **A** se è transitiva e inoltre comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$ si verifica al più una delle seguenti due situazioni: $\mathbf{a}\varrho\mathbf{b}$, oppure $\mathbf{b}\varrho\mathbf{a}$.

Se $\preceq$ è una relazione di ordine in **A**, la relazione $\prec$ in **A** definita ponendo

$$\mathbf{a} \prec \mathbf{b} \quad \text{sse} \quad \mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$$

è una relazione di ordine stretto, che si dice *associata* a $\preceq$. Analogamente, se $\prec$ è una relazione di ordine stretto in **A**, la relazione $\preceq$ in **A** definita ponendo

$$\mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \quad \text{sse} \quad \mathbf{a} \prec \mathbf{b} \text{ oppure } \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

è una relazione di ordine, che si dice *associata* a $\prec$.

Sia $\preceq$ una relazione di ordine in **A**, e sia $\prec$ la relazione di ordine stretto associata a $\preceq$: la relazione di ordine associata a $\prec$ coincide con $\preceq$. Viceversa, sia $\prec$ una relazione di ordine stretto in **A**, e sia $\preceq$ la relazione di ordine associata a $\prec$: la relazione di ordine stretto associata a $\preceq$ coincide con $\prec$. Ciò si esprime dicendo che il concetto di "relazione di ordine" e il concetto di "relazione di ordine stretto" sono equivalenti.

5.3 - Intervalli.

Siano **A** un insieme e $\leq$ una relazione di ordine in **A**. Introduciamo una notazione che sarà molto utile più avanti.

Siano **a**, **b** elementi di **A** tali che **a** $<$ **b**. Si dicono *intervalli* (*limitati*) *di estremi* **a**, **b** i seguenti sottoinsiemi di **A**:

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{x \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{a} < x < \mathbf{b}\}$ (*intervallo aperto*)

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \{x \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{a} < x \leq \mathbf{b}\}$ (*intervallo chiuso a destra*)

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{x \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{a} \leq x < \mathbf{b}\}$ (*intervallo chiuso a sinistra*)

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \{x \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{a} \leq x \leq \mathbf{b}\}$ (*intervallo chiuso*)

Si dicono *intervalli illimitati* i seguenti sottoinsiemi di **A**:

$(-\infty, \mathbf{b}) := \{x \in \mathbf{A} \,/\, x < \mathbf{b}\}$ (*intervallo aperto, illimitato a sinistra*)

$(-\infty, \mathbf{b}] := \{x \in \mathbf{A} \,/\, x \leq \mathbf{b}\}$ (*intervallo chiuso, illimitato a sinistra*)

$(\mathbf{a}, +\infty) := \{x \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{a} < x\}$ (*intervallo aperto, illimitato a destra*)

$[\mathbf{a}, +\infty) := \{x \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{a} \leq x\}$ (*intervallo chiuso, illimitato a destra*)

$(-\infty, +\infty) := \mathbf{A}$ (*intervallo aperto, illimitato a sinistra e a destra*)

5.4 - Minimo e massimo.

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A**, e **X** un sottoinsieme di **A**.

Un elemento **m** di **X** si dice *il minimo* di **X**, e si indica con **min X**, se

$$\mathbf{m} \leq x \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Analogamente, un elemento **M** di **X** si dice *il massimo* di **X**, e si indica con **max X**, se

$$x \leq \mathbf{M} \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Teorema 5.4.1

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A**, e **X** un sottoinsieme di **A**.

Se **X** ha un minimo [un massimo], questo è unico.

Dimostrazione — Siano **m**, **m'** minimi di **X**. Poiché **m** è minimo e **m'** $\in$ **X**, **m** $\leq$ **m'**; poiché **m'** è minimo e **m** $\in$ **X**, **m'** $\leq$ **m**. Per la proprietà antisimmetrica, **m** $=$ **m'** come si voleva.

Analogamente si prova che se **X** ha un massimo questo è unico.

Esempi

5.4.2 Nell'insieme $\mathbb{N}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", l'insieme

$$\mathbf{X} = \{20, 30, 60, 80, 100\}$$

ha per minimo 20 e per massimo 100.

5.4.3 Nell'insieme $\mathbb{N}$ dotato della relazione di "divisibilità" (cfr. esempio 5.2.2), l'insieme

$$\mathbf{X} = \{20, 30, 60, 80, 100\}$$

non ha minimo né massimo.

5.4.4 Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", l'insieme

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; x = \tfrac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$$

non ha minimo; il suo massimo è 1.

5.5 - Limitazioni inferiori e limitazioni superiori.

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A** , e **X** un sottoinsieme non vuoto di **A**.

Un elemento **a** di **A** si dice *limitazione inferiore* (o *minorante*) di **X** se

$$\mathbf{a} \leq x \quad \forall x \in \mathbf{X};$$

si dice invece *limitazione superiore* (o *maggiorante*) di **X** se

$$x \leq \mathbf{a} \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Il sottoinsieme non vuoto **X** di **A** si dice *inferiormente* [*superiormente*] *limitato* se esiste in **A** una limitazione inferiore [superiore] per **X**.

Esempi

5.5.1 Nell'insieme $\mathbb{N}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", il sottoinsieme formato dai multipli di 57 non è superiormente limitato.

5.5.2 Nell'insieme $\mathbb{Q}^+$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", ogni sottoinsieme è inferiormente limitato (da 0).

5.5.3 Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", l'insieme

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; x^2 \leq 2\}$$

è inferiormente limitato (ad es., da $-\frac{3}{2}$) ed è superiormente limitato (ad es., da $\frac{3}{2}$).

5.5.4 Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", l'insieme

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; x^2 \geq 2\}$$

non è né inferiormente né superiormente limitato.

5.6 - Estremo superiore.

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A**, e **X** un sottoinsieme non vuoto di **A** superiormente limitato.

Se l'insieme delle limitazioni superiori di **X** ha minimo, tale minimo si dice *estremo superiore* di **X**, e si indica con **sup X**. Dal teorema 5.4.1 segue subito che l'estremo superiore, qualora esista, è unico.

Teorema 5.6.1

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A**, e **X** un sottoinsieme non vuoto di **A**. Se **X** ha un massimo, questo è anche estremo superiore per **X**.

Dimostrazione – Sia **m** il massimo di **X**. Per definizione di massimo, **m** è una limitazione superiore per **X**; dobbiamo provare che per ogni limitazione superiore **a** di **X** si ha $\mathbf{m} \leq \mathbf{a}$: ma ciò è ovvio (poiché $\mathbf{m} \in \mathbf{X}$) per definizione di limitazione superiore.

Teorema 5.6.2

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A**, e **X** un sottoinsieme non vuoto di **A** dotato di estremo superiore. Se **sup X** appartiene a **X**, esso è il massimo di **X**.

Dimostrazione – Sia $\mathbf{x_0}$ l'estremo superiore di **X**. Poiché $\mathbf{x_0}$ è una limitazione superiore per **X**, si ha che $\mathbf{x} \leq \mathbf{x_0}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$; poiché per ipotesi $\mathbf{x_0} \in \mathbf{X}$, si ha l'asserto.

I teoremi 5.6.1 e 5.6.2 suggeriscono che l'estremo superiore di **X** può essere assunto come "surrogato" del massimo di **X** quando tale massimo manca. Vedremo tuttavia (Esempio 5.6.4) che anche l'estremo superiore può mancare.

Esempio 5.6.3

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", l'insieme

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x = \frac{n}{n+1}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$$

ha per estremo superiore il numero 1.

Dimostrazione – È chiaro che 1 è una limitazione superiore per **X**; resta da provare che ogni limitazione superiore per **X** è maggiore o uguale a 1, ossia che nessun numero razionale y strettamente minore di 1 è limitazione superiore per **X**.

Sia dunque $y \in \mathbb{Q}$, $y < 1$. Possiamo scrivere $y = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $m < n$ (ossia $m + 1 \leq n$); allora $$y = \frac{m}{n} \leq \frac{m}{m+1} = \frac{2m}{2m+2} < \frac{2m}{2m+1}$$

con $\frac{2m}{2m+1} \in \mathbf{X}$, come si voleva.

Esempio 5.6.4

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", l'insieme

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Q}^+ \ / \ x^2 \leq 2\}$$

è superiormente limitato e non ha estremo superiore.

Dimostrazione — Osserviamo intanto che ogni numero razionale positivo α tale che $\alpha^2 \geq 2$ è una limitazione superiore per **X**. In effetti, da $\alpha < x$ con $x \in \mathbb{Q}^+$ segue $\alpha^2 < x^2$; dunque se $x \in \mathbf{X}$ deve essere $x \leq \alpha$, dovendosi altrimenti avere $2 \leq \alpha^2 \leq x^2$.

Supponiamo ora per assurdo che esista $x_0 = \mathbf{sup}\,\mathbf{X}$. Poiché (osservazione 1.8.1) non può essere $x_0^2 = 2$, sarà $x_0^2 < 2$ oppure $x_0^2 > 2$.

Se $x_0^2 < 2$, è $x_0 \in \mathbf{X}$ e dunque $x_0 = \mathbf{max}\,\mathbf{X}$: mostriamo che ciò non è possibile, determinando $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tale che $x_0 + \varepsilon \in \mathbf{X}$. Se $\varepsilon \leq 1$, si ha

$$(x_0 + \varepsilon)^2 = x_0^2 + 2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 \leq x_0^2 + 2\varepsilon x_0 + \varepsilon = x_0^2 + \varepsilon(2x_0 + 1).$$

Possiamo determinare ε in modo che sia $x_0^2 + \varepsilon(2x_0 + 1) = 2$: se risulta $\varepsilon \in (0, 1]$, abbiamo dimostrato che $x_0 + \varepsilon$ appartiene a **X**. In effetti si ha

$$\varepsilon = \frac{2 - x_0^2}{2x_0 + 1};$$

dunque $\varepsilon > 0$, perché $x_0^2 < 2$ per ipotesi (e $x_0 > 0$). Inoltre $\varepsilon \leq 1$, perché ciò significa $2 - x_0^2 \leq 2x_0 + 1$, ossia $1 \leq x_0(x_0 + 2)$, e questo è ovvio essendo $x_0 \geq 1$ (infatti $1 \in \mathbf{X}$).

Resta da considerare la possibilità che sia $x_0^2 > 2$. Mostriamo che in questo caso si può determinare $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tale che $x_0 - \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ e $(x_0 - \varepsilon)^2 > 2$. Ciò conduce ad un assurdo, perché $x_0 - \varepsilon$ risulta una limitazione superiore per **X** strettamente minore di x_0. Si ha

$$(x_0 - \varepsilon)^2 = x_0^2 - 2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 > x_0^2 - 2\varepsilon x_0.$$

Basta allora determinare ε in modo che sia $x_0^2 - 2\varepsilon x_0 = 2$; si trova

$$\varepsilon = \frac{x_0^2 - 2}{2x_0}$$

(e si noti che $\varepsilon > 0$ perché $x_0^2 > 2$ per ipotesi, e $x_0 > 0$).

5.7 - Estremo inferiore.

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A**, e **X** un sottoinsieme non vuoto di **A** inferiormente limitato.

Se l'insieme delle limitazioni inferiori di **X** ha massimo, tale massimo si dice *estremo inferiore* di **X**, e si indica con **inf X**. Ancora dal teorema 5.4.1 segue che l'estremo inferiore, qualora esista, è unico.

Teorema 5.7.1

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A**, e **X** un sottoinsieme non vuoto di **A**. Se **X** ha un minimo, questo è anche estremo inferiore per **X**.

Dimostrazione — La dimostrazione è analoga a quella del teorema 5.6.1, e si lascia al lettore come esercizio [*].

Teorema 5.7.2

Siano **A** un insieme, $\leq$ una relazione di ordine in **A**, e **X** un sottoinsieme non vuoto di **A** dotato di estremo inferiore. Se **inf X** appartiene a **X**, esso è il minimo di **X**.

Dimostrazione — La dimostrazione è analoga a quella del teorema 5.6.2, e si lascia al lettore come esercizio [*].

Esempio 5.7.3

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", l'insieme

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x = \tfrac{1}{n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$$

ha per estremo inferiore il numero 0. (Cfr. esempio 5.4.4).

Dimostrazione — È chiaro che 0 è una limitazione inferiore per **X**; resta da provare che ogni limitazione inferiore per **X** è minore o uguale a 0, ossia che nessun numero razionale positivo y è limitazione inferiore per **X**.
Sia dunque $y \in \mathbb{Q}^+$. Possiamo scrivere $y = \dfrac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$; allora

$$y = \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = 2m\,\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}$$

con $\dfrac{1}{2n} \in \mathbf{X}$, come si voleva.

Esempio 5.7.4

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dotato dell'ordinaria relazione di "minore o uguale", l'insieme

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{Q}^+ \,/\, x^2 \geq 2\}$$

è inferiormente limitato ma non ha estremo inferiore. (La dimostrazione è analoga a quella di 5.6.4).

Esercizio 5.7.5

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dotato della relazione di "divisibilità" (cfr. esempio 5.2.2), si consideri l' insieme

$$\mathbf{X} = \{20, 30, 60, 80, 100\} \qquad \text{(cfr. esempio 5.4.3).}$$

Determinare (qualora esistano) estremo inferiore ed estremo superiore per X.

5.8 - Completezza.

Siano **A** un insieme e $\leq$ una relazione di ordine in **A**.

A si dice *completo* se ogni sottoinsieme non vuoto di **A** che sia superiormente limitato ha estremo superiore.

Esempio 5.8.1

L'insieme $\mathbb{Z}$ con l'ordinaria relazione di "minore o uguale" è completo. (In effetti, in $\mathbb{Z}$ ogni sottoinsieme non vuoto che sia superiormente limitato ha massimo.)

Esempio 5.8.2

L'insieme $\mathbb{Q}$ con l'ordinaria relazione di "minore o uguale" non è completo (cfr. esempio 5.7.4).

Osservazione 5.8.3

È ovvio, ma importante, che proprietà quali la completezza dipendono non tanto dall'insieme che si sta considerando quanto dalla relazione d'ordine che vi si è definita (e che non è mai l'unica possibile!). Per convincersene, definiamo in $\mathbb{Q}$ una relazione d'ordine come segue:
Rappresentiamo ogni elemento di $\mathbb{Q}$ con la frazione $\frac{m}{n}$ tale che m, n sono primi fra loro e $n > 0$ (tale frazione resta univocamente determinata da queste condizioni); diciamo *altezza* di $\frac{m}{n}$ il numero naturale $|\, m \,| + n$. Poniamo poi $\frac{m_1}{n_1} \leq \frac{m_2}{n_2}$ se e solo se l'altezza di $\frac{m_1}{n_1}$ è strettamente minore dell'altezza di $\frac{m_2}{n_2}$ oppure $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$ hanno la stessa altezza e $m_1 \leq m_2$ (secondo l'usuale relazione d'ordine fissata in $\mathbb{Z}$).
È facile ([11]) vedere che rispetto a questa relazione d'ordine
- ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Q}$ ha minimo;
- ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Q}$ che sia superiormente limitato ha massimo (e quindi, in particolare, ha estremo superiore).

Teorema 5.8.4

Siano **A** un insieme e $\leq$ una relazione di ordine in **A**.
A è completo se e solo se ogni sottoinsieme non vuoto di **A** che sia inferiormente limitato ha estremo inferiore.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

[11] Si tratta in sostanza di osservare che per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste solo un numero finito di frazioni aventi altezza h.

6.- RELAZIONI DI EQUIVALENZA

6.1 - Definizione.

Sia **A** un insieme.

Una relazione in **A** riflessiva, simmetrica e transitiva si dice una *relazione di equivalenza* in **A**.

Esempi

Sono esempi di relazioni di equivalenza:

6.1.1 La relazione di "equiscomponibilità" nell'insieme dei poligoni piani.

6.1.2 La relazione di "similitudine" nell'insieme delle figure piane.

6.1.3 La relazione di "parallelismo" nell'insieme delle rette del piano, definita come segue:
due rette sono parallele sse coincidono oppure non hanno punti in comune.

6.1.4 In ogni insieme **A**, la relazione di "misantropia" che ad ogni elemento di **A** associa lui stesso e nessun altro (cioè: se **a**, **b** $\in$ **A**, **a** è in relazione con **b** sse **a** $=$ **b**).

6.1.5 In ogni insieme **A**, la relazione che ad ogni elemento di **A** associa tutti gli elementi di **A** (cioè: comunque si prendano **a**, **b** $\in$ **A**, **a** è in relazione con **b**).

Esempio 6.1.6

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle frazioni ([12]). La relazione ϱ in $\mathcal{F}$ definita ponendo per $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathcal{F}$

$$\frac{a}{b}\,\varrho\,\frac{c}{d} \quad \text{sse} \quad ad = bc$$

è una relazione di equivalenza. Infatti:

ϱ è riflessiva: $\frac{a}{b}\,\varrho\,\frac{a}{b}$ per ogni $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}$, perché $ab = ba$ per la proprietà commutativa del prodotto;

ϱ è simmetrica: $\frac{a}{b}\,\varrho\,\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d}\,\varrho\,\frac{a}{b}$, perché $(ad = bc) \Rightarrow (cb = da)$;

ϱ è transitiva: sia infatti $\frac{a}{b}\,\varrho\,\frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d}\,\varrho\,\frac{e}{f}$, cioè $ad = bc$ e $cf = de$; dalla prima uguaglianza segue $adf = bcf$ e da qui, tenendo conto della seconda, $adf = bde$; dividendo infine ambo i membri per d (che è diverso da 0 per ipotesi) si deduce che $af = be$ ossia che $\frac{a}{b}\,\varrho\,\frac{e}{f}$ come si voleva.

---

[12] Ricordiamo che si dice *frazione* una coppia ordinata (cfr. 3.7) di numeri interi in cui la seconda componente sia diversa da 0; si conviene (cfr. 1.8) di scrivere $\frac{a}{b}$ anziché (a, b).

Esempio 6.1.7

Altri esempi particolarmente importanti di relazioni di equivalenza sono descritti in dettaglio altrove, e li ricordiamo qui per completezza:

– la *congruenza* e la *congruenza diretta* nell'insieme delle figure piane (cfr. [1]);

– l'*equivalenza* fra matrici (cfr. 14.5).

6.2 - Classi di equivalenza.

Siano $\mathbf{A}$ un insieme e $\sim$ una relazione di equivalenza in $\mathbf{A}$.

Se $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, si dice *classe di* $\sim$ *– equivalenza* di $\mathbf{a}$ (o anche, quando ciò non dia luogo ad equivoci, *classe di equivalenza* di $\mathbf{a}$) il sottoinsieme $[\mathbf{a}]$ di $\mathbf{A}$ definito come segue:

$$[\mathbf{a}] = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \,/\, \mathbf{a} \sim \mathbf{x}\}.$$

Osservazione 6.2.1

Per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, si ha $\mathbf{a} \in [\mathbf{a}]$.

Dimostrazione – Infatti $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$, perché $\sim$ è riflessiva.

Osservazione 6.2.2

Comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$, si ha $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$ se e solo se $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$.

Dimostrazione – Se $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$, poiché $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$ (per 6.2.1) si ha $\mathbf{b} \in [\mathbf{a}]$ e dunque $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ (per definizione di $[\mathbf{a}]$).

Viceversa, sia $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$; dobbiamo provare che $[\mathbf{a}] \subset [\mathbf{b}]$ e che $[\mathbf{b}] \subset [\mathbf{a}]$.

Sia $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}]$; allora $\mathbf{a} \sim \mathbf{x}$. Ma $\mathbf{b} \sim \mathbf{a}$ (perché $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ per ipotesi, e $\sim$ è simmetrica) e dunque $\mathbf{b} \sim \mathbf{x}$ (perché $\sim$ è transitiva), cioè $\mathbf{x} \in [\mathbf{b}]$. Per l'arbitrarietà di $\mathbf{x}$ in $[\mathbf{a}]$, si è provato che $[\mathbf{a}] \subset [\mathbf{b}]$.

Sia ora $\mathbf{x} \in [\mathbf{b}]$; allora $\mathbf{b} \sim \mathbf{x}$. Poiché $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ per ipotesi, e poiché $\sim$ è transitiva, si ha $\mathbf{a} \sim \mathbf{x}$, cioè $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}]$. Per l'arbitrarietà di $\mathbf{x}$ in $[\mathbf{b}]$, si è così anche provato che $[\mathbf{b}] \subset [\mathbf{a}]$ e dunque che $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$.

Osservazione 6.2.3

Sia $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$. Per ogni $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}]$, è $[\mathbf{x}] = [\mathbf{a}]$.

Dimostrazione – Per definizione di $[\mathbf{a}]$, se $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}]$ è $\mathbf{a} \sim \mathbf{x}$; dunque $[\mathbf{a}] = [\mathbf{x}]$ per l'osservazione 6.2.2.

Sia $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$. Per ogni $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}]$, si dice che $\mathbf{x}$ *rappresenta* $[\mathbf{a}]$, o anche che $\mathbf{x}$ *è un rappresentante di* $[\mathbf{a}]$. Ciò è giustificato da quanto si è visto nell'osservazione 6.2.3.

Osservazione 6.2.4

Comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$, se $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$ è $[\mathbf{a}] \cap [\mathbf{b}] = \emptyset$.

Dimostrazione – Sia $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$. Procediamo per assurdo, supponendo che esista $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}] \cap [\mathbf{b}]$. In tal caso $\mathbf{a} \sim \mathbf{x}$ (perché $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}]$) e $\mathbf{b} \sim \mathbf{x}$ (perché $\mathbf{x} \in [\mathbf{b}]$); per 6.2.2 si ha allora $[\mathbf{a}] = [\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]$, contro l'ipotesi.

Osservazione 6.2.5

L'insieme delle classi di equivalenza di $\mathbf{A}$ è una partizione di $\mathbf{A}$.

Dimostrazione – Le classi di equivalenza sono a due a due disgiunte per 6.2.4; per 6.2.1 esse sono non vuote e la loro unione è $\mathbf{A}$.

6.3 - Insieme quoziente.

Siano $\mathbf{A}$ un insieme e $\sim$ una relazione di equivalenza in $\mathbf{A}$.

L'insieme delle classi di $\sim$ – equivalenza di $\mathbf{A}$ si dice *insieme quoziente* di $\mathbf{A}$ rispetto a $\sim$, e si indica con $\frac{\mathbf{A}}{\sim}$. La funzione (suriettiva) $\pi{:}\mathbf{A} \to \frac{\mathbf{A}}{\sim}$ che ad ogni elemento di $\mathbf{A}$ associa la sua classe di equivalenza si dice *proiezione canonica* di $\mathbf{A}$ su $\frac{\mathbf{A}}{\sim}$. Si noti che $\mathcal{D}(\pi) = \mathbf{A}$.

Se $\sim$ mette in relazione tra loro gli elementi di $\mathbf{A}$ che hanno in comune una certa proprietà astratta, l'insieme quoziente rappresenta intuitivamente l'insieme di tali proprietà astratte, e la proiezione canonica associa ad ogni elemento di $\mathbf{A}$ la specifica proprietà che gli è pertinente. Vediamo meglio in che senso ciò avviene, riesaminando gli esempi già considerati in 6.1.

$\boxed{6.3.1}$

Sia $\mathbf{A}$ l'insieme dei poligoni del piano, e sia $\sim$ la relazione di equiscomponibilità.

La proprietà astratta comune a una classe di poligoni equiscomponibili è la "superficie": tale concetto, in effetti, può essere definito per i poligoni appunto per questa via. La proiezione canonica $\mathbf{A} \to \frac{\mathbf{A}}{\sim}$ associa a ogni poligono la sua superficie.

$\boxed{6.3.2}$

Sia $\mathbf{A}$ l'insieme delle figure piane, e sia $\sim$ la relazione di similitudine.

La proprietà astratta comune a una classe di figure piane simili è la "forma". Nell'insieme quoziente $\frac{\mathbf{A}}{\sim}$ troviamo elementi che rappresentano i concetti di "triangolo equilatero", "quadrato", "cerchio", ecc.

$\boxed{6.3.3}$

Sia $\mathbf{A}$ l'insieme delle rette del piano, e sia $\sim$ la relazione di parallelismo definita in 6.1.3.

L'insieme quoziente $\frac{\mathbf{A}}{\sim}$ si dice *insieme delle direzioni*.

$\boxed{6.3.4}$

Sia $\mathbf{A}$ un insieme, e sia $\sim$ la relazione di "misantropia" definita in 6.1.4.

L'insieme quoziente è (in corrispondenza biunivoca con) $\mathbf{A}$.

$\boxed{6.3.5}$

Sia $\mathbf{A}$ un insieme, e sia $\sim$ la relazione definita in 6.1.5.

L'insieme quoziente è $\{\mathbf{A}\}$.

$\boxed{6.3.6}$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle frazioni, e sia ϱ la relazione definita in 6.1.6.

L'insieme quoziente $\frac{\mathcal{F}}{\varrho}$ è (in corrispondenza biunivoca con) $\mathbb{Q}$. In effetti, i numeri razionali si definiscono appunto con questo procedimento a partire dall'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi.

La proiezione canonica associa a ogni frazione il numero razionale che essa rappresenta.

6.4 - Le classi di resto.

In tutta la sezione 6.4 supporremo fissato un numero intero positivo $\boldsymbol{n}$*.*

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$; si dice che a *è congruo* b *modulo* n e si scrive
$$a \equiv b \ (\text{mod } n)$$
sse $(\exists k \in \mathbb{Z})(a - b = kn)$, ossia sse $a - b$ è multiplo di n.

Si è così definita una relazione in $\mathbb{Z}$, detta "*congruenza modulo* n". Tale relazione è stata studiata fin dall'antichità: sono celebri le opere in proposito del matematico ellenista Diofanto, vissuto nel terzo secolo d. C..

Teorema 6.4.1

La congruenza modulo n è una relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione – In primo luogo, la congruenza modulo n è riflessiva, ossia
$$a \equiv a \ (\text{mod } n) \qquad \text{per ogni } a \in \mathbb{Z}.$$
Infatti, $a - a = 0 \cdot n$ con $0 \in \mathbb{Z}$.

Inoltre, la congruenza modulo n è simmetrica: siano $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $a \equiv b$ (mod n) e proviamo che $b \equiv a$ (mod n). In effetti, se $a \equiv b$ (mod n) esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a - b = kn$; ma allora $b - a = (-k)n$ con $-k \in \mathbb{Z}$, e dunque $b \equiv a$ (mod n).

Infine, la congruenza modulo n è transitiva: siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tali che $a \equiv b$ (mod n) e $b \equiv c$ (mod n), e proviamo che $a \equiv c$ (mod n). In effetti, se $a \equiv b$ (mod n) esiste $k_1 \in \mathbb{Z}$ tale che $a - b = k_1 n$; se $b \equiv c$ (mod n) esiste $k_2 \in \mathbb{Z}$ tale che $b - c = k_2 n$; ma allora
$$a - c = (a - b) + (b - c) = k_1 n + k_2 n = (k_1 + k_2) \cdot n$$
con $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, e dunque $a \equiv c$ (mod n).

Per quanto provato nel teorema 6.4.1, se $a \equiv b$ (mod n) si può dire che a, b sono *congrui modulo* n senza porre attenzione all'ordine in cui si citano a e b.

Esercizio 6.4.2

Trovare due numeri interi che sono congrui modulo 5 ma non sono congrui modulo 10. Esistono due numeri interi che siano congrui modulo 10 ma non siano congrui modulo 5?

Teorema 6.4.3

Sia $a \in \mathbb{Z}$, e sia r il resto della divisione euclidea di a per n. Allora $a \equiv r$ (mod n).

Dimostrazione – Per definizione di divisione euclidea (cfr. osservazione 1.8.1), esiste $q \in \mathbb{Z}$ tale che
$$a = qn + r$$
e dunque $a - r = qn$ con $q \in \mathbb{Z}$, da cui l'asserto.

Le classi di equivalenza rispetto alla relazione di congruenza modulo n si dicono *classi di resto modulo* n. L'insieme delle classi di resto modulo n (cioè l'insieme quoziente di $\mathbb{Z}$ rispetto alla relazione di congruenza modulo n) si indica con $\mathbb{Z}_n$.

Esercizio [*] 6.4.4

Si deduca dal teorema 6.4.3 che due numeri interi a, b sono congrui modulo n se e solo se la divisione euclidea di a per n e la divisione euclidea di b per n danno lo stesso resto.

Teorema 6.4.5

L'insieme $\mathbb{Z}_n$ ha n elementi, precisamente: $[0]$, $[1]$, $\dots$, $[n-1]$.

Dimostrazione — Per il teorema 6.4.3, ogni numero intero appartiene a una delle classi $[0]$, $[1]$, $\dots$, $[n-1]$. Resta da provare che tali classi sono tutte distinte.
Se fosse $[i] = [j]$ con $0 \leq i < j < n$, per l'osservazione 6.2.2 sarebbe $i \equiv j \pmod{n}$ ossia esisterebbe $k \in \mathbb{Z}$ tale che $j - i = kn$.
Ma $j - i > 0$ (perché $j > i$) e $j - i < n$ (perché $j < n$ e $i \geq 0$), dunque $j - i$ non può essere multiplo di n. Abbiamo così ottenuto una contraddizione; ne segue che le classi $[0]$, $[1]$, $\dots$, $[n-1]$ sono tutte distinte, come si voleva.

Esercizio 6.4.6

Si studi la congruenza modulo 1, la congruenza modulo 2, la congruenza modulo 3, la congruenza modulo 10, la congruenza modulo 12 e la congruenza modulo 24; in particolare, per ciascuna di tali relazioni si scrivano esplicitamente le classi di resto e si precisi come opera la proiezione canonica.

7.- OPERAZIONI IN UN INSIEME

7.1 - Operazioni in un insieme.

Sia $\mathbf{A}$ un insieme non vuoto.

Si dice *operazione* (*binaria*, *interna*) in $\mathbf{A}$ una funzione da $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ in $\mathbf{A}$ il cui dominio coincide con $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ (cioè, intuitivamente, una "legge" che ad ogni coppia ordinata di elementi di $\mathbf{A}$ associa un elemento di $\mathbf{A}$).

Se $\bigstar$ è un'operazione in $\mathbf{A}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$, scriviamo $\mathbf{a}\bigstar\mathbf{b}$ anziché $\bigstar(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: così $\mathbf{a}\bigstar\mathbf{b} = \mathbf{c}$ significa che $\mathbf{c}$ è l'immagine di $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mediante $\bigstar$, ossia che $\bigstar$ associa alla coppia ordinata $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ di elementi di $\mathbf{A}$ l'elemento $\mathbf{c}$ di $\mathbf{A}$ (rigorosamente: $((\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{c}) \in \bigstar$).

Esempi

7.1.1 Le ordinarie operazioni di somma e prodotto sono operazioni in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

7.1.2 Per ogni insieme $\mathbf{A}$, la composizione definita in 4.7 è un'operazione nell'insieme di tutte le funzioni $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ il cui dominio coincide con $\mathbf{A}$.

7.1.3 Nell'insieme $\mathbb{Z}$, la sottrazione è un'operazione, la divisione non lo è.

7.1.4 Nell'insieme $\mathbb{N}$ è un'operazione la $\bigstar$ definita come segue:
$$\mathbf{a}\bigstar\mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{b}+1) \qquad\qquad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}.$$

7.1.5 Nell'insieme $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ è un'operazione la $\bigstar$ definita come segue ([13]):
$$\mathbf{a}\bigstar\mathbf{a} = \mathbf{a}, \mathbf{a}\bigstar\mathbf{b} = \mathbf{b}, \mathbf{a}\bigstar\mathbf{c} = \mathbf{c}, \mathbf{b}\bigstar\mathbf{a} = \mathbf{b}, \mathbf{b}\bigstar\mathbf{b} = \mathbf{a}, \mathbf{b}\bigstar\mathbf{c} = \mathbf{a}, \mathbf{c}\bigstar\mathbf{a} = \mathbf{c}, \mathbf{c}\bigstar\mathbf{b} = \mathbf{a}, \mathbf{c}\bigstar\mathbf{c} = \mathbf{b}.$$

7.1.6 Sia $\mathbf{A}$ un insieme. Le operazioni (definite in 3.6) che a due sottoinsiemi di $\mathbf{A}$ associano la loro unione e la loro intersezione sono operazioni in $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ (nel senso definito in 7.1) che si indicano rispettivamente con $\cup$ e $\cap$.

---

[13] Come si definisce un'operazione? Ricordiamo che "operazione in $\mathbf{A}$" è una particolare funzione $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, cioè una particolare relazione tra $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$, cioè un particolare sottoinsieme di $(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A}$; i criteri per definire un'operazione sono dunque gli stessi che abbiamo stabilito nel capitolo 2 per definire un insieme.

In particolare, l'operazione dell'esempio 7.1.5 è definita come in 3.2; quella dell'esempio 7.1.4 come in 3.3.

7.2 - Chiusura rispetto a un'operazione.

Sia **A** un insieme nel quale è definita un'operazione $\bigstar$.

Un sottoinsieme **B** di **A** si dice *chiuso* rispetto a $\bigstar$ se comunque presi **b**, **b'** $\in$ **B** è anche **b**$\bigstar$**b'** $\in$ **B**.

Esempi

7.2.1 $\mathbb{Q}^+$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

7.2.2 Il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ formato dai numeri dispari è chiuso rispetto al prodotto ma non rispetto alla somma.

7.2.3 Siano **I** un insieme e **A** l'insieme di tutte le funzioni da **I** in **I** il cui dominio coincide con **I**. Il sottoinsieme di **A** costituito dalle corrispondenze biunivoche (cioè l'insieme delle *permutazioni* su **I**) è chiuso rispetto alla composizione.

7.3 - Associatività e commutatività.

Sia **A** un insieme.

Un'operazione $\bigstar$ in **A** si dice *associativa* se

$$\mathbf{a}\bigstar(\mathbf{b}\bigstar\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\bigstar\mathbf{b})\bigstar\mathbf{c} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{A}.$$

Un'operazione $\bigstar$ in **A** si dice *commutativa* se

$$\mathbf{a}\bigstar\mathbf{b} = \mathbf{b}\bigstar\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}.$$

Esempi

Le operazioni considerate in 7.1.1 e 7.1.6 sono associative e commutative (cfr. anche 3.6.3 e 3.6.4); quella considerata in 7.1.2 è associativa ma in generale non commutativa; quella considerata in 7.1.5 è commutativa ma non associativa (infatti $(\mathrm{b}\bigstar\mathrm{b})\bigstar\mathrm{c} \neq \mathrm{b}\bigstar(\mathrm{b}\bigstar\mathrm{c})$); quella considerata in 7.1.4 non è né associativa né commutativa.

7.4 - Elemento neutro.

Siano **A** un insieme e $\bigstar$ un'operazione definita in **A**.

Un elemento $\boldsymbol{n}$ di **A** si dice *elemento neutro* per $\bigstar$ se $\quad \mathbf{a}\bigstar\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\bigstar\mathbf{a} = \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{A}$.

Se l'operazione $\bigstar$ è detta *somma*, l'elemento neutro si indica con "0" e si chiama "*zero*"; se è detta *prodotto*, si indica con "1" e si chiama "*uno*" oppure "*unità*".

Teorema 7.4.1

Siano **A** un insieme e $\bigstar$ un'operazione definita in **A**. Se esiste un elemento neutro per $\bigstar$, questo è unico.

Dimostrazione — Siano $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ elementi neutri per $\bigstar$. Allora $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \bigstar \boldsymbol{n'} = \boldsymbol{n'}$, come si voleva.

Esempi

7.4.2 L'operazione $\bigstar$ considerata in 7.1.4 non ha elemento neutro. Si noti che $\mathbf{a} \bigstar 0 = \mathbf{a}$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$, ma in generale $0 \bigstar \mathbf{a} \neq \mathbf{a}$.

7.4.3 L'operazione "somma" in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ ha come elemento neutro il numero 0.

7.4.4 L'operazione "prodotto" in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ ha come elemento neutro il numero 1.

7.4.5 L'operazione $\bigstar$ considerata in 7.1.5 ha come elemento neutro l'elemento **a**.

7.4.6 Le operazioni "unione" e "intersezione" considerate in 7.1.6 hanno come elemento neutro rispettivamente $\emptyset$ e **A**.

7.4.7 L'operazione "composizione" considerata in 7.1.2 ha come elemento neutro la funzione $\mathbf{id_A}$ definita in 4.4.3.

7.5 - Il simmetrico di un elemento.

Siano **A** un insieme e $\bigstar$ un'operazione definita in **A** per la quale esiste l'elemento neutro $\boldsymbol{n}$.

Per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, si dice *simmetrico di* **a** (rispetto a $\bigstar$) un elemento $\overline{\mathbf{a}} \in \mathbf{A}$ tale che sia

$$\mathbf{a} \bigstar \overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}} \bigstar \mathbf{a} = \boldsymbol{n}.$$

Se l'operazione $\bigstar$ è detta *somma*, il simmetrico di **a** si dice *opposto* di **a**, e si indica con $-\mathbf{a}$; se è detta *prodotto*, si dice *inverso* di **a**, e si indica con $\mathbf{a}^{-1}$.

Teorema 7.5.1

Siano **A** un insieme e $\bigstar$ un'operazione associativa definita in **A** per la quale esiste l'elemento neutro $\boldsymbol{n}$.

Per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, se esiste un simmetrico questo è unico.

Dimostrazione — Siano $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\overline{\mathbf{a}}}$ simmetrici di **a**. Allora

$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}} \bigstar \boldsymbol{n} = \overline{\mathbf{a}} \bigstar (\mathbf{a} \bigstar \overline{\overline{\mathbf{a}}}) = (\overline{\mathbf{a}} \bigstar \mathbf{a}) \bigstar \overline{\overline{\mathbf{a}}} = \boldsymbol{n} \bigstar \overline{\overline{\mathbf{a}}} = \overline{\overline{\mathbf{a}}}.$$

Esempi

7.5.2 Rispetto all'operazione $\bigstar$ definita in 7.1.5 (che non è associativa), l'elemento **b** ha due distinti simmetrici: se stesso e l'elemento **c**.

7.5.3 In $\mathbb{Z}$, per ogni elemento esiste l'opposto (cioè, il simmetrico rispetto alla somma) ma solo per +1 e -1 esiste l'inverso (cioè, il simmetrico rispetto al prodotto).

7.5.4 Rispetto alle operazioni di "unione" e "intersezione" considerate in 7.1.6, non esiste in generale il simmetrico di un elemento di $\mathcal{P}(\mathbf{A})$.

7.5.5 Rispetto all'operazione di "composizione" considerata in 7.1.2 non esiste in generale il simmetrico di una funzione. Tuttavia, se **f** è una corrispondenza biunivoca di **A** in sé la funzione $\mathbf{f}^{-1}$ definita in 4.6 è il simmetrico di **f** rispetto alla composizione.

7.6 - La proprietà distributiva.

Siano **A** un insieme e $\bigstar$, $\circ$ due operazioni definite in **A**.

Si dice che $\circ$ è *distributiva* rispetto a $\bigstar$ se

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \bigstar \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \bigstar (\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) \quad \text{e} \quad (\mathbf{a} \bigstar \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = (\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) \bigstar (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{A}.$$

Esempi

7.6.1 Negli esempi 7.1.1, il prodotto è distributivo rispetto alla somma ma la somma non è distributiva rispetto al prodotto.

7.6.2 Ciascuna delle due operazioni considerate in 7.1.6 è distributiva rispetto all'altra (cfr. anche 3.6.5).

8.- GRUPPI E ANELLI

8.1 - Gruppi.

Siano **G** un insieme e $\bigstar$ un'operazione in **G**.

Si dice che **G** è un *gruppo* rispetto a $\bigstar$, oppure (più correttamente!) che la coppia $(\mathbf{G}, \bigstar)$ è un gruppo, se valgono le seguenti proprietà:

$\boxed{\text{G.1}}$ l'operazione $\bigstar$ è associativa;

$\boxed{\text{G.2}}$ esiste in **G** l'elemento neutro per $\bigstar$;

$\boxed{\text{G.3}}$ per ogni $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ esiste il ([14]) simmetrico di **g** rispetto a $\bigstar$.

Se inoltre

$\boxed{\text{G.4}}$ l'operazione $\bigstar$ è commutativa

il gruppo si dice *commutativo* o *abeliano*.

$\boxed{\text{Esempi}}$

$\boxed{8.1.1}$ $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono gruppi abeliani rispetto alla somma.

$\boxed{8.1.2}$ $\mathbb{N}$ non è un gruppo rispetto alla somma (non esiste in generale l'opposto di un elemento).

$\boxed{8.1.3}$ $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ non sono gruppi rispetto al prodotto (non esiste l'inverso di 0).

$\boxed{8.1.4}$ $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ e $\mathbb{Q}^+$ sono gruppi abeliani rispetto al prodotto.

$\boxed{8.1.5}$ Per ogni insieme **A**, l'insieme delle permutazioni su **A** (cfr. 4.4) è un gruppo (in generale non abeliano) rispetto alla composizione di funzioni definita in 4.7.

$\boxed{8.1.6}$ Sia **A** un insieme. $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ (cfr. 3.5) non è un gruppo né rispetto all'unione né rispetto all'intersezione; è però un gruppo abeliano rispetto all'operazione $\bigstar$ (detta *differenza simmetrica*) definita come segue:

$$\mathbf{X} \bigstar \mathbf{Y} = (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \setminus (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \qquad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{A}).$$

[14] cfr. $\boxed{\text{G.1}}$ e il teorema 7.5.1.

8.2 - Sottogruppi.

Sia $(\mathbf{G}, \bigstar)$ un gruppo.

Un sottoinsieme non vuoto **H** di **G**, chiuso rispetto a $\bigstar$, si dice *sottogruppo* di **G** se $(\mathbf{H}, \bigstar)$ è ancora un gruppo ([15]).

Esempi

8.2.1 $\mathbb{Z}^+$ non è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$, pur essendo chiuso rispetto alla somma.

8.2.2 $\mathbb{Q}^+$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ (cfr. esempio 8.1.4).

Teorema 8.2.3

Sia $(\mathbf{G}, \bigstar)$ un gruppo, e sia **H** un sottogruppo di G. L'elemento neutro per $\bigstar$ in **H** coincide con l'elemento neutro per $\bigstar$ in **G** (e quindi, per ogni $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ il simmetrico di **h** in **H** coincide col simmetrico di **h** in **G**).

Dimostrazione — Sia $\boldsymbol{n}$ l'elemento neutro per $\bigstar$ in **G**, e sia $\boldsymbol{n_1}$ l'elemento neutro per $\bigstar$ in **H**. Poiché $\boldsymbol{n_1} \in \mathbf{H}$, deve essere $\boldsymbol{n_1} \bigstar \boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{n_1}$; dunque si ha (indicando con $\overline{\boldsymbol{n_1}}$ il simmetrico di $\boldsymbol{n_1}$ in **G**)

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1} \bigstar \overline{\boldsymbol{n_1}} = (\boldsymbol{n_1} \bigstar \boldsymbol{n_1}) \bigstar \overline{\boldsymbol{n_1}} = \boldsymbol{n_1} \bigstar (\boldsymbol{n_1} \bigstar \overline{\boldsymbol{n_1}}) = \boldsymbol{n_1} \bigstar \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1}.$$

Possiamo ora applicare il teorema 7.5.1 e concludere che per ogni elemento di **H** il simmetrico in **H** coincide col simmetrico in **G**.

8.3 - Omomorfismi e isomorfismi tra gruppi.

Siano $(\mathbf{G}, \bigstar)$ e $(\mathbf{H}, \circ)$ gruppi.

Una funzione $\mathbf{f} : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ tale che $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \mathbf{G}$ si dice un *omomorfismo* tra $(\mathbf{G}, \bigstar)$ e $(\mathbf{H}, \circ)$ (o anche, più semplicemente, tra **G** e **H**) se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} \bigstar \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{f}(\mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{G}.$$

Un omomorfismo che sia anche una corrispondenza biunivoca si dice *isomorfismo*.

Esempio 8.3.1

Un esempio significativo e importante di isomorfismo tra gruppi sarà dato in 10.4 (teorema 10.4.2).

---

[15] Rigorosamente, la notazione $(\mathbf{H}, \bigstar)$ è impropria; infatti, quella che si può considerare in **H** non è l'operazione $\bigstar$ ma la restrizione ad **H** di $\bigstar$ (cfr. 4.5). Distinguere tra $\bigstar$ e la sua restrizione ad **H** appesantirebbe però senza scopo la nostra esposizione, ed eviteremo quindi di farlo.

8.4 - Anelli.

Sia **A** un insieme con almeno due elementi, e siano $+, \cdot$ due operazioni in **A** (che chiameremo rispettivamente *somma* e *prodotto*).

Si dice che **A** è un *anello* rispetto a $+$ e $\cdot$, oppure (più correttamente!) che la terna $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ è un anello, se

$\boxed{\text{A.1}}$ $(\mathbf{A}, +)$ è un gruppo commutativo;

$\boxed{\text{A.2}}$ il prodotto è associativo;

$\boxed{\text{A.3}}$ il prodotto è distributivo rispetto alla somma.

Se inoltre

$\boxed{\text{A.4}}$ esiste in **A** un elemento neutro per il prodotto

oppure

$\boxed{\text{A.5}}$ il prodotto è commutativo

si dice rispettivamente che **A** è un *anello con unità* (e l'elemento neutro si dice l'*unità* di **A**, e si indica con "1") oppure che **A** è un *anello commutativo*. Naturalmente, se valgono sia la $\boxed{\text{A.4}}$ che la $\boxed{\text{A.5}}$ si dice che **A** è un *anello commutativo con unità*.

Ricordiamo che, come convenuto in 7.4, gli elementi neutri per la somma e il prodotto si indicano rispettivamente con "0" e "1"; qualora possa esservi confusione con i numeri naturali 0 e 1, si usano le notazioni "0_A" e "1_A". Inoltre, secondo quanto stabilito in 7.5, l'opposto di un elemento **x** si indica con $-\mathbf{x}$, l'inverso di un elemento **x** (se esiste) si indica con $\mathbf{x}^{-1}$.

$\boxed{\text{Esempi}}$

$\boxed{\text{8.4.1}}$ $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono anelli commutativi con unità rispetto alle ordinarie operazioni di somma e prodotto.

$\boxed{\text{8.4.2}}$ L'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$ (oppure in $\mathbb{Q}$) nell'indeterminata **x** è un anello commutativo con unità rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

$\boxed{\text{8.4.3}}$ L'insieme dei numeri interi pari (cioè della forma $2k$ con $k \in \mathbb{Z}$) è un anello commutativo <u>senza</u> unità rispetto alle ordinarie operazioni di somma e prodotto.

Osservazione 8.4.4

Sia $(\mathbf{A}, \ + \ , \ \cdot \ )$ un anello. Per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, si ha $\mathbf{a} \cdot 0 = 0 \cdot \mathbf{a} = 0$.

Dimostrazione – Ricordiamo che abbiamo convenuto in 7.4 di indicare con 0 l'elemento neutro di **A** rispetto alla somma. Si ha

$$\mathbf{a} \cdot 0 = \mathbf{a} \cdot (0 + 0) = \mathbf{a} \cdot 0 + \mathbf{a} \cdot 0$$

da cui (sommando ad ambo i membri l'opposto di $\mathbf{a} \cdot 0$) si ricava che $0 = \mathbf{a} \cdot 0$. Allo stesso modo si trova che $0 \cdot \mathbf{a} = 0$.

Osservazione 8.4.5

Sia $(\mathbf{A}, \ + \ , \ \cdot \ )$ un anello con unità. Si ha $\quad 1 \neq 0$

ossia, l'elemento neutro per il prodotto è necessariamente distinto dall'elemento neutro per la somma.

Dimostrazione – Se fosse $1 = 0$, per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ sarebbe

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a} \cdot 0 = 0$$

e dunque in **A** esisterebbe solo l'elemento 0, contro l'ipotesi che **A** sia un anello (e che dunque appartengano ad **A** almeno due elementi).

Osservazione 8.4.6

Sia $(\mathbf{A}, \ + \ , \ \cdot \ )$ un anello con unità. Non esiste in **A** l'inverso di 0.

Dimostrazione – Se $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, è $\mathbf{a} \cdot 0 = 0$ per l'osservazione 8.4.4, e dunque (per l'osservazione 8.4.5) non può essere $\mathbf{a} \cdot 0 = 1$.

Osservazione 8.4.7

Sia $(\mathbf{A}, \ + \ , \ \cdot \ )$ un anello con unità. Si ha

$$(-1) \cdot (-1) = 1;$$

inoltre, per ogni $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, si ha

$$(-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

Dimostrazione – Per l'osservazione 8.4.4 si ha (applicando la proprietà distributiva)

$$0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e dunque, sommando 1 ad ambo i membri, la prima parte dell'asserto. Inoltre, sempre applicando l'osservazione 8.4.4 e la proprietà distributiva,

$$(-1) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} = (-1) \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{a} = (-1 + 1) \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = 0$$

e, analogamente, $\mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{a} = 0$, cosicché $(-1) \cdot \mathbf{a}$ è l'opposto di **a**.

8.5 - Omomorfismi e isomorfismi tra anelli.

Siano $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ e $(\mathbf{B}, \oplus, \odot)$ anelli.

Una funzione $\mathbf{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tale che $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \mathbf{A}$ si dice un *omomorfismo* tra $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ e $(\mathbf{B}, \oplus, \odot)$ (o anche, più semplicemente, tra **A** e **B**) se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \oplus \mathbf{f}(\mathbf{y}) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \odot \mathbf{f}(\mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}.$$

Un omomorfismo che sia anche una corrispondenza biunivoca si dice *isomorfismo*.

Esempio 8.5.1

Un esempio significativo di omomorfismo tra anelli sarà dato in 8.6 (teorema 8.6.11).

Esercizio [*] 8.5.2

Siano $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ e $(\mathbf{B}, \oplus, \odot)$ anelli, e sia $\mathbf{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un isomorfismo tra **A** e **B**. Si dimostri che la funzione inversa $\mathbf{f}^{-1}: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ è un isomorfismo tra $(\mathbf{B}, \oplus, \odot)$ e $(\mathbf{A}, +, \cdot)$.

8.6 - L'anello $\mathbb{Z}_n$.

In tutta la sezione 8.6 supporremo fissato un numero intero positivo n.

Definiamo nell'insieme $\mathbb{Z}_n$ (cfr. 6.4) due operazioni: le indicheremo con " $+$ " e " $\cdot$ ", e le chiameremo rispettivamente *somma* e *prodotto*. Se $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$, poniamo

$$[a] + [b] := [a+b]$$

e

$$[a] \cdot [b] := [a \cdot b].$$

Si noti che con lo stesso simbolo " $+$ " abbiamo indicato a sinistra l'operazione che stiamo definendo in $\mathbb{Z}_n$ e a destra la ben nota operazione di somma in $\mathbb{Z}$; analogamente per il simbolo " $\cdot$ " (che, per di piú, spesso si omette, proprio come in $\mathbb{Z}$). Ciò usualmente non dà luogo ad ambiguità né a confusione.

Si noti inoltre che abbiamo definito la "somma" (e il "prodotto") di due classi di resto mediante la somma (o, rispettivamente, il prodotto) dei loro rappresentanti: poiché tali rappresentanti non sono univocamente determinati, è importante assicurarsi che la definizione sia "ben posta", ossia dipenda solo dalle classi considerate e non dai rappresentanti scelti in esse (cfr. l'esempio 4.2.1 e, più avanti, l'esempio 8.6.2). Ciò avviene mediante il

Teorema 8.6.1

Siano a, b, a’, b’ $\in \mathbb{Z}$. Se $[a] = [a']$ e $[b] = [b']$, allora $[a + b] = [a' + b']$ e $[ab] = [a'b']$.

Dimostrazione — Per l’osservazione 6.2.2, se $[a] = [a']$ e $[b] = [b']$ deve essere

$$a \equiv a' \pmod{n} \qquad \text{e} \qquad b \equiv b' \pmod{n},$$

ossia devono esistere h, $k \in \mathbb{Z}$ tali che

$$a - a' = hn \qquad \text{e} \qquad b - b' = kn.$$

Allora

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') = hn + kn = (h + k)n$$

e dunque $$a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$$

ossia, ancora per l’osservazione 6.2.2, $[a + b] = [a' + b']$ come si voleva dimostrare.

Inoltre,

$$ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + b'(a - a') = akn + b'hn = (ak + b'k)n$$

e dunque $$ab \equiv a'b' \pmod{n}$$

ossia, ancora per l’osservazione 6.2.2, $[ab] = [a'b']$ come si voleva dimostrare.

Esempio 8.6.2

Sia $n = 3$.
Si ha $[2] = [5]$, tuttavia $[2^2] = [1] \neq [2] = [2^5]$. Non sarebbe dunque possibile definire, analogamente a come si è fatto per somma e prodotto, un “elevamento a potenza” in $\mathbb{Z}_n$ ponendo $[a]^{[b]} := [a^b]$.
Analogamente, per $n = 5$, si ha $[3] = [8]$, tuttavia $[2^3] = [8] = [3] \neq [1] = [256] = [2^8]$.

Teorema 8.6.3

$(\mathbb{Z}_n, +)$ è un gruppo abeliano.

Dimostrazione — Proviamo in primo luogo che la somma in $\mathbb{Z}_n$ è associativa. Se $[a]$, $[b]$, $[c]$ appartengono a $\mathbb{Z}_n$ (con a, b, $c \in \mathbb{Z}$), si ha

$$([a] + [b]) + [c] = [a + b] + [c] = [(a + b) + c] =$$
$$= [a + (b + c)] = [a] + [b + c] = [a] + ([b] + [c])$$

perché la somma in $\mathbb{Z}$ è associativa.

Si ha poi

$$[a] + [0] = [a + 0] = [a] = [0 + a] = [0] + [a]$$

per ogni $[a] \in \mathbb{Z}_n$, e dunque $[0]$ è l’elemento neutro per la somma in $\mathbb{Z}_n$.

Se $[a] \in \mathbb{Z}_n$ (con $a \in \mathbb{Z}$), si ha $[a] + [-a] = [-a] + [a] = [0]$ e dunque $[-a]$ è l’opposto di $[a]$.

Proviamo infine che la somma in $\mathbb{Z}_n$ è commutativa. Se $[a]$ e $[b]$ appartengono a $\mathbb{Z}_n$ (con a, $b \in \mathbb{Z}$), si ha $[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]$
perché la somma in $\mathbb{Z}$ è commutativa. L’asserto è così completamente provato.

Esercizio [*] 8.6.4

Si dimostri che $(\mathbb{Z}_n, \; + \, , \; \cdot \,)$ è un anello commutativo con unità.

Esempio 8.6.5

Sia $n = 6$.
Si ha $[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [0]$; dunque in $\mathbb{Z}_6$ non vale la legge di annullamento del prodotto.

Esempio 8.6.6

Sia $n = 4$.
Si ha $[2] \cdot [2] = [2 \cdot 2] = [4] = [0]$; dunque in $\mathbb{Z}_4$ l'elemento $[2] \neq 0$ ha per quadrato 0.

Esempio 8.6.7

Sia $n = 3$.
Il polinomio $x^3 + [2]x$ si annulla per ogni elemento di $\mathbb{Z}_3$, ma non è il polinomio nullo.

Esempio 8.6.8

Sia $n = 6$.
Si ha $[4] = [4] \cdot [4] = [4] \cdot [4] \cdot [4] = [4] \cdot [4] \cdot \ldots [4]$.

Esercizio 8.6.9

Sia $n = 6$.
Risolvere, se è possibile, le seguenti equazioni in $\mathbb{Z}_6$ nell'incognita x:

$$
\begin{array}{ll}
[3] \cdot x = [2]; & [3] \cdot x = [3]; \\
[4] \cdot x = [2]; & [4] \cdot x = [3]; \\
[5] \cdot x = [1]; & [5] \cdot x = [2]; \\
x^2 = [2]; & x^2 = [3]; \\
x^2 + [1] = [0]; & x^2 + [2] = [0];
\end{array}
$$

$$x^5 + [3] \cdot x^4 + x^3 + [3] \cdot x^2 + [4] \cdot x = [0].$$

Esercizio 8.6.10

Sia $n = 7$.
Risolvere, se è possibile, le seguenti equazioni in $\mathbb{Z}_7$ nell'incognita x:

$$[3] \cdot x = [2];$$
$$[3] \cdot x = [3];$$
$$[4] \cdot x = [2];$$
$$[4] \cdot x = [3];$$
$$[5] \cdot x = [1];$$
$$[5] \cdot x = [2];$$
$$x^2 = [2];$$
$$x^2 = [3];$$
$$x^2 + [1] = [0].$$

Teorema 8.6.11

La proiezione canonica $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ è un omomorfismo fra anelli.

Dimostrazione — Siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Si ha $[a+b] = [a] + [b]$ e $[ab] = [a][b]$ per definizione di somma e prodotto in $\mathbb{Z}_n$, e ciò prova l'asserto.

8.7 - I criteri di divisibilità per i numeri interi.

Come applicazione della teoria sviluppata nella sez. 8.6, dimostriamo i classici criteri di divisibilità per i numeri interi.

In tutta questa sezione, indichiamo con m un numero intero e con n un numero intero positivo. Ci proponiamo di stabilire condizioni necessarie e sufficienti affinché m sia divisibile per n, ossia (cfr. teorema 6.4.3 ed esercizio 6.4.4) affinché si abbia

$$m \equiv 0 \pmod{n}.$$

Poiché numeri opposti hanno gli stessi divisori, possiamo supporre che sia $m > 0$.

I nostri criteri faranno riferimento alle cifre della rappresentazione posizionale di m in base 10; sia dunque

$$m = c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0.$$

Per ogni numero intero a, indicheremo con $[a]$ la classe di resto modulo n a cui appartiene a; per il teorema 8.6.11, possiamo scrivere

$$(\bigstar) \qquad [m] = [c_k] \cdot [10]^k + [c_{k-1}] \cdot [10]^{k-1} + \ldots + [c_3] \cdot [10]^3 + [c_2] \cdot [10]^2 + [c_1] \cdot [10] + [c_0].$$

Teorema 8.7.1

Sia c_0 l'ultima cifra di m. Si ha
$$m \equiv c_0 \pmod 2$$
$$m \equiv c_0 \pmod 5$$
e
$$m \equiv c_0 \pmod{10}.$$
Pertanto: m è divisibile per 2 sse l'ultima cifra di m è 0, 2, 4, 6 oppure 8; m è divisibile per 5 sse l'ultima cifra di m è 0 oppure 5; m è divisibile per 10 sse l'ultima cifra di m è 0.

Dimostrazione — Se $n = 2$ oppure $n = 5$ oppure $n = 10$, è $[10] = [0]$ e quindi dalla ($\bigstar$), ricordando l'osservazione 8.4.4, si ricava che
$$[m] = [c_0]$$
ossia (cfr. osservazione 6.2.2) $m \equiv c_0 \pmod n$.

Le uniche cifre divisibili per 2 sono 0, 2, 4, 6 e 8; le uniche cifre divisibili per 5 sono 0 e 5; e l'unica cifra divisibile per 10 è 0. L'asserto è così completamente provato.

Teorema 8.7.2

Siano c_2, c_1 e c_0 le ultime tre cifre di m. Si ha
$$m \equiv c_1 \cdot [10] + c_0 \pmod 4$$
e
$$m \equiv c_2 \cdot [10]^2 + c_1 \cdot [10] + c_0 \pmod 8.$$
Pertanto: m è divisibile per 4 sse è divisibile per 4 il numero formato dalle ultime due cifre di m; m è divisibile per 8 sse è divisibile per 8 il numero formato dalle ultime tre cifre di m.

Dimostrazione — Dalla ($\bigstar$) si ricava che
$$[m] = [h_0] \cdot [1000] + [c_2] \cdot [10]^2 + [c_1] \cdot [10] + [c_0] =$$
$$= [h_1] \cdot [100] + [c_1] \cdot [10] + [c_0].$$
Se $n = 8$, è $[1000] = [0]$ e quindi (ricordando l'osservazione 8.4.4)
$$[m] = [c_2] \cdot [10]^2 + [c_1] \cdot [10] + [c_0];$$
Se $n = 4$, è $[100] = [0]$ e quindi (ricordando ancora l'osservazione 8.4.4)
$$[m] = [c_1] \cdot [10] + [c_0]$$
come si voleva.

Teorema 8.7.3

Sia m un numero intero, e siano c_k, $c_{k-1} \ldots$, c_2, c_1 e c_0 le cifre di m. Si ha
$$m \equiv (c_k + c_{k-1} + \ldots + c_2 + c_1 + c_0) \pmod 3$$
e
$$m \equiv (c_k + c_{k-1} + \ldots + c_2 + c_1 + c_0) \pmod 9$$
Pertanto: m è divisibile per 3 [risp.: per 9] sse è divisibile per 3 [risp.: per 9] la somma delle sue cifre.

Dimostrazione — Se $n = 3$ oppure $n = 9$, è $[10] = [1]$ e quindi dalla ($\bigstar$) si ricava che
$$[m] = [c_k] \cdot [1]^k + [c_{k-1}] \cdot [1]^{k-1} + \ldots + [c_2] \cdot [1]^2 + [c_1] \cdot [1] + [c_0] =$$
$$= [c_k] + [c_{k-1}] + \ldots + [c_2] + [c_1] + [c_0] = [c_k + c_{k-1} + \ldots + c_2 + c_1 + c_0].$$
Dall'osservazione 6.2.2 segue l'asserto.

Osservazione 8.7.4

Sia $n = 9$.
Per il teorema 8.6.11, se $a = b + c$ allora è anche $[a] = [b] + [c]$; se $a = b - c$ allora è anche $[a] = [b] - [c]$; se $a = b \cdot c$ allora è anche $[a] = [b] \cdot [c]$; se $a = bq + r$ allora è anche $[a] = [b][q] + [r]$. Attenzione: non vale il viceversa!
Il teorema 8.7.3 giustifica la cosiddetta "prova del 9" per la somma, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione euclidea.

Esercizio 8.7.5

Sia $n = 9$.
Si trovino dei numeri interi a, b e c tali che $a \neq bq + r$ ma $[a] = [b][q] + [r]$, mostrando così che la "prova del 9" fornisce una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esattezza del calcolo.

Esercizio [*] 8.7.6

Si enunci una "prova del 3" analoga a quella "del 9". Si può enunciare analogamente una "prova del 2" ? E una "prova dell' 8" ? E una "prova del 10" ? E una "prova del 6" ?
Perché la più diffusa è la "prova del 9" ?

Teorema 8.7.7

Siano c_k, c_{k-1}, $\ldots$, c_2, c_1 e c_0 le cifre di m, e supponiamo k pari (ponendo $c_k := 0$ qualora m abbia un numero pari di cifre). Si ha

$$m \equiv (c_k - c_{k-1} + \ldots + c_2 - c_1 + c_0) \pmod{11}$$

ossia
$$m \equiv (c_k + c_{k-2} + \ldots + c_2 + c_0) - (c_{k-1} + c_{k-3} + \ldots + c_1) \pmod{11}.$$

Pertanto: m è divisibile per 11 sse è divisibile per 11 la differenza tra la somma delle sue cifre "di posto dispari" e la somma delle sue cifre "di posto pari".

Dimostrazione — Se $n = 11$ si ha $[10] = -[1]$, da cui (per il teorema 8.6.11)

$$[10]^h = -[1] \quad \text{se } h \text{ è dispari} \quad \text{e} \quad [10]^h = [1] \quad \text{se } h \text{ è pari.}$$

Ancora per il teorema 8.6.11, e ricordando che abbiamo scelto c_k in modo che k sia pari, dalla $(\bigstar)$ si ricava che

$$[m] = [c_k] \cdot [1]^k + [c_{k-1}] \cdot (-[1]) + \ldots + [c_2] \cdot [1] + [c_1] \cdot (-[1]) + [c_0] =$$
$$= [c_k] - [c_{k-1}] + \ldots + [c_2] - [c_1] + [c_0] = [c_k - c_{k-1} + \ldots + c_2 - c_1 + c_0].$$

Dall'osservazione 6.2.2 segue l'asserto.

Esercizio [*] 8.7.8

Si enunci una "prova dell'11" analoga a quella "del 9", discutendone in raffronto vantaggi e svantaggi.

9.- CAMPI

9.1 - Campi.

Sia **F** un insieme con almeno due elementi, e siano $+\,,\cdot$ due operazioni in **F** (che chiameremo rispettivamente *somma* e *prodotto*).

Si dice che **F** è un *campo* rispetto a $+$ e $\cdot$, oppure (più correttamente!) che la terna (**F**, $+\,,\ \cdot$) è un campo, se

$\boxed{\text{F.1}}$ (**F**, $+\,,\ \cdot$) è un anello

e inoltre

$\boxed{\text{F.2}}$ (**F**$\setminus\{0\}$, $\cdot$) è un gruppo commutativo.

Sia (**F**, $+\,,\ \cdot$) un campo. Il fatto che (**F**$\setminus\{0\}$, $\cdot$) sia un gruppo commutativo comporta in particolare che **F**$\setminus\{0\}$ è chiuso rispetto al prodotto. Dunque un prodotto di elementi di **F** può essere 0 solo se almeno uno dei fattori è 0 (questa è la cosiddetta *legge di annullamento del prodotto*).

Sia (**F**, $+\,,\ \cdot$) un campo, e sia $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$. Se $n \in \mathbb{Z}^+$, si indica con $n\mathbf{x}$ l'elemento di **F** ottenuto sommando n addendi tutti uguali a **x** (cioè: $n\mathbf{x} := \mathbf{x} + \mathbf{x} + \ldots + \mathbf{x}$, dove **x** compare n volte al secondo membro); si pone poi $(-n)\mathbf{x} := -(n\mathbf{x})$. Convenendo infine che $0\mathbf{x} = 0_{\mathrm{F}}$, si è definito il significato della scrittura $z\mathbf{x}$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

Sia (**F**, $+\,,\ \cdot$) un campo, e sia $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$. Se $n \in \mathbb{Z}^+$, si indica con $\mathbf{x}^n$ l'elemento di **F** ottenuto moltiplicando n fattori tutti uguali a **x** (cioè: $\mathbf{x}^n := \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \ldots \cdot \mathbf{x}$, dove **x** compare n volte al secondo membro).

$\boxed{\text{Esempi}}$

$\boxed{9.1.1}$ $\mathbb{Q}$ è un campo rispetto alle ordinarie operazioni di somma e prodotto.

$\boxed{9.1.2}$ L'insieme $\mathbb{GF}(2) = \{0, 1\}$ è un campo rispetto alle operazioni $+\,,\ \cdot$ definite ponendo

$$0+0=0;\quad 0+1=1;\quad 1+0=1;\quad 1+1=0;\quad 0\cdot 0=0;\quad 0\cdot 1=0;\quad 1\cdot 0=0;\quad 1\cdot 1=1.$$

$\boxed{9.1.3}$ Sia p un numero primo. L'anello $\mathbb{Z}_p$ considerato in 8.6 è un campo, che si indica anche con $\mathbb{GF}(p)$. Per $p = 2$ si ottiene il campo considerato nell'esempio 9.1.2.

Esercizio [*] 9.1.4

Sia (**F**, $+$, $\cdot$) un campo. Si dimostri che

$$(m+n)\mathbf{x} = m\mathbf{x} + n\mathbf{x} \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \mathbf{x} \in \mathbf{F}$$

$$(m\mathbf{x}) \cdot (n\mathbf{y}) = (mn)(\mathbf{xy}) \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}$$

9.2 - Isomorfismo tra campi.

Siano (**F**, $+$, $\cdot$) e (**F'**, $\oplus$, $\odot$) campi.

Una corrispondenza biunivoca **f** : **F** $\to$ **F'** si dice un *isomorfismo* tra **F** e **F'** se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \oplus \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \odot \mathbf{f}(\mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}.$$

Due campi tra i quali esista un isomorfismo si "comportano allo stesso modo" rispetto alla somma e al prodotto; si dice anche che "coincidono a meno di isomorfismi".

Esercizio [*] 9.2.1

Siano (**F**, $+$, $\cdot$) e (**F'**, $\oplus$, $\odot$) campi, e sia **f** : **F** $\to$ **F'** un isomorfismo tra **F** e **F'**. Si dimostri che la funzione inversa $\mathbf{f}^{-1}$: **F'** $\to$ **F** è un isomorfismo tra (**F'**, $\oplus$, $\odot$) e (**F**, $+$, $\cdot$).

9.3 - Sottocampi.

Sia (**F**, $+$, $\cdot$) un campo.

Un sottoinsieme non vuoto **K** di **F**, chiuso rispetto alla somma e al prodotto, si dice *sottocampo* di **F** se (**K**, $+$, $\cdot$) è ancora un campo.

Esempio 9.3.1

$\mathbb{Q}^+$ non è un sottocampo di ($\mathbb{Q}$, $+$, $\cdot$), pur essendo chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

9.4 - Campi ordinati.

Siano $(\mathbf{F}, +, \cdot)$ un campo e $\leq$ una relazione di ordine totale in **F** (cfr. 5.2).

Si dice che $(\mathbf{F}, +, \cdot, \leq)$ è un *campo ordinato* se [16]

$\boxed{\text{9.4.CO1}}$ $\quad \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} + \mathbf{c} \leq \mathbf{b} + \mathbf{c} \qquad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{F}$;

$\boxed{\text{9.4.CO2}}$ $\quad (\mathbf{a} \leq \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} > 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ac} \leq \mathbf{bc} \qquad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{F}$.

Le $\boxed{\text{9.4.CO1}}$ e $\boxed{\text{9.4.CO2}}$ esprimono in sostanza il fatto che la relazione d'ordine $\leq$ è "compatibile" con le operazioni di somma e prodotto definite in **F**.

$\boxed{\text{Esempio 9.4.1}}$

Il campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un campo ordinato.

$\boxed{\text{Esempio 9.4.2}}$

Il campo $\mathbb{GF}(2)$ considerato nell'esempio 9.1.2 **non** è un campo ordinato. Mostriamo infatti che: se per una relazione di ordine totale $\leq$ in $\mathbb{GF}(2)$ valesse la $\boxed{\text{9.4.CO1}}$, non potrebbe essere né $0 \leq 1$ né $1 \leq 0$.

Se fosse
$$0 \leq 1$$
allora per la $\boxed{\text{9.4.CO1}}$ dovrebbe essere anche
$$0 + 1 \leq 1 + 1$$
ossia
$$1 \leq 0$$
da cui $0 = 1$, assurdo.

Analogamente, se fosse
$$1 \leq 0$$
allora per la $\boxed{\text{9.4.CO1}}$ dovrebbe essere anche
$$1 + 1 \leq 0 + 1$$
ossia
$$0 \leq 1$$
da cui ancora $0 = 1$, assurdo.

---

[16] Tutte le volte che ciò non dia luogo ad ambiguità scriveremo **xy** anziché $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

$\boxed{\text{Teorema 9.4.3}}$

Sia $(\mathbf{F}, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{F}$ si ha

$$(\mathbf{a} \leq \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \leq \mathbf{d}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}+\mathbf{c} \leq \mathbf{b}+\mathbf{d}$$

e

$$(0 \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{b}) \wedge (0 \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{d}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ac} \leq \mathbf{bd}.$$

Dimostrazione — Sia $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$. Per la $\boxed{\text{9.4.CO1}}$, da $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ segue che

$$\mathbf{a}+\mathbf{c} \leq \mathbf{b}+\mathbf{c}$$

e da $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$ segue che

$$\mathbf{b}+\mathbf{c} \leq \mathbf{b}+\mathbf{d}.$$

Per la proprietà transitiva della relazione $\leq$ si ha allora che

$$\mathbf{a}+\mathbf{c} \leq \mathbf{b}+\mathbf{d}.$$

Sia inoltre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{F}^+$. Per la $\boxed{\text{9.4.CO2}}$, da $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ segue che

$$\mathbf{ac} \leq \mathbf{bc}$$

e da $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$ segue che

$$\mathbf{bc} \leq \mathbf{bd}.$$

Per la proprietà transitiva della relazione $\leq$ si ha allora che

$$\mathbf{ac} \leq \mathbf{bd}.$$

$\boxed{\text{Teorema 9.4.4}}$

Sia p un numero primo. Il campo $\mathbb{GF}(p)$ (cfr. esempio 9.1.3) <u>non</u> è un campo ordinato.

Dimostrazione — Procediamo per assurdo, supponendo che esista in $\mathbb{GF}(p)$ una relazione di ordine totale $\leq$ tale che $(\mathbb{GF}(p), +, \cdot, \leq)$ risulti un campo ordinato. Per l'osservazione 8.4.5, deve essere vera una e una sola delle seguenti due relazioni: $1 > 0$ oppure $1 < 0$.

Supponiamo in primo luogo che si abbia $1 > 0$; dal teorema 9.4.3 si ricava che

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p-1 \text{ volte}} > \underbrace{0+0+\ldots+0}_{p-1 \text{ volte}}$$

ossia $-1 > 0$ da cui, ancora per il teorema 9.4.3, $-1+1 > 0+1$ ossia $0 > 1$ assurdo perché abbiamo invece supposto che si abbia $0 < 1$.

Supponendo che si abbia $1 < 0$, si procede analogamente: dal teorema 9.4.3 si ricava in primo luogo che $-1 < 0$ e poi che $0 < 1$ giungendo ancora ad un assurdo.

Sia $(\mathbf{F},\ +\,,\ \cdot\,,\ \leq\,)$ un campo ordinato.

Gli elementi $\mathbf{x}$ di $\mathbf{F}$ per i quali risulta $\mathbf{x} > 0$ si dicono *positivi*; l'insieme di tali elementi si indica con $\mathbf{F}^+$. Gli elementi $\mathbf{x}$ di $\mathbf{F}$ per i quali risulta $\mathbf{x} < 0$ si dicono invece *negativi*; l'insieme di tali elementi si indica con $\mathbf{F}^-$.

Si noti che (poiché $\leq$ è per ipotesi una relazione di ordine totale) $\{\mathbf{F}^+, \{0\}, \mathbf{F}^-\}$ è una partizione di $\mathbf{F}$ (cfr. 3.7).

Teorema 9.4.5

Sia $(\mathbf{F},\ +\,,\ \cdot\,,\ \leq\,)$ un campo ordinato. Comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{F}$ si ha che

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}+\mathbf{c} < \mathbf{b}+\mathbf{c};$$
$$(\mathbf{a} < \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} > 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ac} < \mathbf{bc};$$
$$(\mathbf{a} < \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} < \mathbf{d}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}+\mathbf{c} < \mathbf{b}+\mathbf{d};$$
$$(0 \leq \mathbf{a} < \mathbf{b}) \wedge (0 \leq \mathbf{c} < \mathbf{d}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ac} < \mathbf{bd}.$$

Dimostrazione — Se $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, per la 9.4.CO1 deve essere

$$\mathbf{a}+\mathbf{c} \leq \mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

Se fosse $\mathbf{a}+\mathbf{c} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$, sommando $-\mathbf{c}$ ad ambo i membri si avrebbe $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, contro l'ipotesi; dunque, $\mathbf{a}+\mathbf{c} < \mathbf{b}+\mathbf{c}$, come si voleva.

Se $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ e $\mathbf{c} > 0$, per la 9.4.CO2 deve essere

$$\mathbf{ac} \leq \mathbf{bc}.$$

Se fosse $\mathbf{ac} = \mathbf{bc}$, moltiplicando ambo i membri per $\mathbf{c}^{-1}$ (che esiste, perché $\mathbf{F}$ è un campo e $\mathbf{c} \neq 0$ essendo $\mathbf{c} > 0$) si avrebbe $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, contro l'ipotesi; dunque, $\mathbf{ac} < \mathbf{bc}$, come si voleva.

Le ultime due implicazioni seguono dalle prime due procedendo come nella dimostrazione del teorema 9.4.3.

Teorema 9.4.6

Sia $(\mathbf{F}, \ +\ , \ \cdot\ , \ \leq\ )$ un campo ordinato, e sia $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$. Si ha ([17])

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+} \quad \Leftrightarrow \quad -\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{-}.$$

Dimostrazione — Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$. Allora

$$\mathbf{x} > 0$$

e dunque (per il teorema 9.4.5, sommando $-\mathbf{x}$ ad ambo i membri)

$$0 > -\mathbf{x}$$

ossia

$$-\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{-}.$$

Viceversa, sia $-\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{-}$. Allora

$$-\mathbf{x} < 0$$

e dunque (per il teorema 9.4.5, sommando $\mathbf{x}$ ad ambo i membri)

$$0 < \mathbf{x}$$

ossia

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$$

come si voleva.

Teorema 9.4.7

Sia $(\mathbf{F}, \ +\ , \ \cdot\ , \ \leq\ )$ un campo ordinato. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$, si verifica uno e uno solo dei seguenti casi:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+} \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{x} = 0 \qquad \text{oppure} \qquad -\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}.$$

Dimostrazione — Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$.

Proviamo in primo luogo che si verifica almeno uno dei casi $\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$, $\mathbf{x} = 0$, $-\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$. Poiché la $\leq$ è per ipotesi una relazione di ordine totale in $\mathbf{F}$, sarà $0 \leq \mathbf{x}$ oppure $\mathbf{x} \leq 0$; se $0 \leq \mathbf{x}$, si ha $\mathbf{x} = 0$ oppure $\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$; se $\mathbf{x} \leq 0$ si ha $\mathbf{x} = 0$ oppure $\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{-}$, ossia (per il teorema 9.4.5) $-\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$.

Proviamo ora che si verifica uno solo dei casi $\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$, $\mathbf{x} = 0$, $-\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$. Se $\mathbf{x} = 0$ (e quindi anche $-\mathbf{x} = 0$) non può essere $\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$ né $-\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$ per definizione di $\mathbf{F}^{+}$. Se fosse $\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$ e $-\mathbf{x} \in \mathbf{F}^{+}$, sarebbe $\mathbf{x} \geq 0$ e $-\mathbf{x} \geq 0$ (da cui ancora $0 \geq \mathbf{x}$), ossia $\mathbf{x} = 0$ (per la proprietà antisimmetrica) che è assurdo per la definizione di $\mathbf{F}^{+}$.

---

[17] Si ricordi che $-\mathbf{x}$ indica l'opposto di $\mathbf{x}$, cioè il simmetrico di $\mathbf{x}$ rispetto alla somma, come convenuto in 8.4.

Teorema 9.4.8

Sia $(\mathbf{F}, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Comunque scelti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}$, si ha:

(i) $(\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) \Rightarrow (-\mathbf{y} \leq -\mathbf{x})$;

(ii) $\mathbf{x}^2 \geq 0$; inoltre, $(\mathbf{x}^2 = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = 0)$;

(iii) $1 > 0$ (e, quindi, $-1 < 0$); inoltre, $k \cdot 1 > 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}^+$;

(iv) $(\mathbf{x} > 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x}^{-1} > 0)$;

(v) $(\mathbf{x} \geq \mathbf{y} > 0) \Rightarrow (\mathbf{x}^{-1} \leq \mathbf{y}^{-1})$;

(vi) $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}^+)((\mathbf{x}^k \geq \mathbf{y}^k) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \geq \mathbf{y}))$;

(vii) $(0 < \mathbf{x} < 1) \Rightarrow (\mathbf{x}^2 < \mathbf{x})$.

Dimostrazione – Proviamo la (i). Dalla $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ segue subito (sommando $-\mathbf{x}$ ad ambo i membri) che $\mathbf{y} - \mathbf{x} \geq 0$. Se $\mathbf{y} - \mathbf{x} = 0$, allora $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e quindi $-\mathbf{x} = -\mathbf{y}$, da cui in particolare $-\mathbf{y} \leq -\mathbf{x}$. Se $\mathbf{y} - \mathbf{x} > 0$, è $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathbf{F}^+$ e quindi (per il teorema 9.4.6) $\mathbf{x} - \mathbf{y} < 0$, da cui infine (sommando $-\mathbf{x}$ ad ambo i membri) $-\mathbf{x} > -\mathbf{y}$ e dunque $-\mathbf{x} \geq -\mathbf{y}$, come si voleva.

Proviamo la (ii). Per la legge di annullamento del prodotto e per l'osservazione 8.4.4, è chiaro che $\mathbf{x}^2 = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = 0$. Se $\mathbf{x} > 0$, allora $\mathbf{x}^2 \geq 0 \cdot \mathbf{x}$ (per la 9.4.CO2), e dunque $\mathbf{x}^2 \geq 0$ ricordando ancora l'osservazione 8.4.4. Se $\mathbf{x} < 0$, allora $-\mathbf{x} \geq 0$ (per il teorema 9.4.7) e dunque $(-\mathbf{x})^2 \geq 0$ per quanto appena visto. D'altro lato,

$$(-\mathbf{x})^2 = ((-1) \cdot \mathbf{x})^2 = (-1)^2 \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^2$$

ricordando l'osservazione 8.4.7.

Poiché $1 = 1^2$, e $1 \neq 0$, dalla (ii) segue che $1 > 0$; per induzione su k si prova facilmente la (iii).

Essendo $(\mathbf{x}^{-1})^{-1} = \mathbf{x}$, per provare la (iv) basta mostrare che $(\mathbf{x} > 0) \Rightarrow (\mathbf{x}^{-1} > 0)$. Sia allora $\mathbf{x} > 0$. Se fosse $\mathbf{x}^{-1} < 0$ (non può essere $\mathbf{x}^{-1} = 0$ per l'osservazione 8.4.4) sarebbe $-\mathbf{x}^{-1} > 0$ (per il teorema 9.4.6), e quindi $-\mathbf{x}^{-1} \cdot \mathbf{x} > 0 \cdot \mathbf{x}$ (per il teorema 9.4.5) ossia $-1 > 0$ contro la (iii).

Proviamo ora la (v). Sia $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} > 0$. Per la (iv) è anche $\mathbf{x}, \mathbf{y} > 0$; dunque $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}^{-1} > 0$ per la 9.4.CO2. Applicando ancora la 9.4.CO2 (con $\mathbf{c} = \mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}^{-1}$) alla $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, si trova $\mathbf{y}^{-1} \geq \mathbf{x}^{-1}$, come si voleva.

La (vi) equivale alla

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{x}^{k-2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{k-3}\mathbf{y}^2 + \ldots + \mathbf{x}\mathbf{y}^{k-2} + \mathbf{y}^{k-1}) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} \geq 0$$

che è immediata per la 9.4.CO2 essendo per ipotesi $\mathbf{x}, \mathbf{y} > 0$ e quindi anche

$$\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{x}^{k-2}\mathbf{y} + \mathbf{x}^{k-3}\mathbf{y}^2 + \ldots + \mathbf{x}\mathbf{y}^{k-2} + \mathbf{y}^{k-1} \geq 0.$$

Proviamo infine la (vii). Poiché per ipotesi $\mathbf{x} > 0$, per il teorema 9.4.5 si ha che

$$(\mathbf{x} < 1) \Rightarrow (\mathbf{x}^2 < \mathbf{x}) \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{x} > 1) \Rightarrow (\mathbf{x}^2 > \mathbf{x})$$

da cui l'asserto.

Osservazione 9.4.9

In un campo ordinato, l'equazione $\mathbf{x}^2 + 1 = 0$ nell'incognita x non ha soluzioni.

Dimostrazione – Infatti, $\mathbf{x}^2 + 1 = 0$ equivale a $\mathbf{x}^2 = -1$; ma $\mathbf{x}^2 \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$ (per la (ii) del teorema 9.4.8) e $-1 < 0$ (per la (iii) dello stesso teorema 9.4.8).

Siano ($\mathbf{F}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) e ($\mathbf{F'}$, $\oplus$, $\odot$, $\preceq$) campi ordinati.

Si dice *isomorfismo* tra ($\mathbf{F}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) e ($\mathbf{F'}$, $\oplus$, $\odot$, $\preceq$) un isomorfismo tra i campi ($\mathbf{F}$, $+$, $\cdot$) e ($\mathbf{F'}$, $\oplus$, $\odot$) (cfr. 9.2) per il quale sia inoltre

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f(x)} \preceq \mathbf{f(y)} \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}.$$

Esercizio [*] 9.4.10

Siano ($\mathbf{F}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) e ($\mathbf{F'}$, $\oplus$, $\odot$, $\preceq$) campi ordinati, e sia $\mathbf{f} : \mathbf{F} \to \mathbf{F'}$ un isomorfismo tra $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F'}$. Si dimostri che la funzione inversa $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{F'} \to \mathbf{F}$ è un isomorfismo tra ($\mathbf{F'}$, $\oplus$, $\odot$, $\preceq$) e ($\mathbf{F}$, $+$, $\cdot$, $\leq$).

Teorema 9.4.11

Ogni campo ordinato possiede un sottocampo isomorfo a $\mathbb{Q}$.

Dimostrazione – Sia ($\mathbf{F}$, $+$, $\cdot$, $\preceq$) un campo ordinato. Definiamo una funzione φ : $\mathbb{Q} \to \mathbf{F}$ ponendo $\varphi(\frac{m}{n}) = (m\mathbf{1_F})(n\mathbf{1_F})^{-1}$ $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Si dimostra (ma noi omettiamo i dettagli) che φ è "ben definita" (cioè che $\varphi(\frac{m}{n})$ non dipende dalla <u>frazione</u> $\frac{m}{n}$ ma solo dal numero razionale che $\frac{m}{n}$ rappresenta), che φ è iniettiva (e quindi, poiché $\mathcal{D}(\varphi) = \mathbb{Q}$, φ è una biiezione tra $\mathbb{Q}$ e $\varphi(\mathbb{Q})$, cfr. 4.4), e infine che φ è un isomorfismo fra campi ordinati.

10.- IL CAMPO DEI NUMERI REALI

10.1 - Definizione di $\mathbb{R}$. Numeri razionali, irrazionali, algebrici, trascendenti.

Vale il seguente importante teorema del quale omettiamo la dimostrazione:

Teorema 10.1.1

Esiste un campo ordinato completo, e tutti i campi ordinati completi sono isomorfi fra loro.

Il teorema 10.1.1 consente di porre la seguente definizione: si dice *campo dei numeri reali*, e si indica con $\mathbb{R}$, un campo ordinato completo. Nel seguito, coi simboli "0" e "1" indicheremo sempre gli elementi neutri di $\mathbb{R}$ per, rispettivamente, la somma e il prodotto.

Per il teorema 9.4.11, l'insieme dei numeri reali che si possono scrivere nella forma $(m \cdot 1) \cdot (n \cdot 1)^{-1}$ con $m,\ n \in \mathbb{Z}$ è un sottocampo di $\mathbb{R}$ isomorfo al campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Gli elementi di tale sottocampo si dicono *reali razionali*; gli elementi del complementare si dicono *reali irrazionali*. Nel seguito identificheremo sempre, come è usuale, il numero reale razionale $(m \cdot 1) \cdot (n \cdot 1)^{-1}$ con il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{m}{n}$.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dice che α è *algebrico* se esiste un polinomio $\mathbf{p}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $\mathbf{p}(\alpha) = 0$, ossia se α è radice di un opportuno polinomio a coefficienti interi. Si dice che α è *trascendente* se non è algebrico, ossia se non è radice di alcun polinomio a coefficienti interi.

Osservazione 10.1.2

Ogni numero razionale è algebrico.

Dimostrazione — Sia $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Allora $\frac{m}{n}$ è radice del polinomio $nx - m \in \mathbb{Z}[x]$.

Per l'osservazione 10.1.2, ogni numero trascendente è irrazionale; esistono tuttavia numeri irrazionali algebrici (cfr. 10.3). In altri termini, l'insieme dei numeri razionali è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri algebrici che a sua volta è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$.

Si dice *valore assoluto di* x e si indica con $|\,x\,|$ la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$|\,x\,| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

10.2 - La rappresentazione dei numeri reali sulla retta.

Supponiamo di aver fissato nel piano una unità di misura $\mathcal{U}$. I numeri reali ci consentono di assegnare una *misura* anche ai segmenti non commensurabili con $\mathcal{U}$: per ogni segmento $\mathcal{S}$, si considera l'insieme delle misure di tutti i segmenti contenuti in $\mathcal{S}$ e commensurabili con $\mathcal{U}$ (cfr. 1.4); tale insieme non è vuoto ed è superiormente limitato (cfr. [9], Assioma V-1) e dunque, per la completezza di $\mathbb{R}$, ammette un estremo superiore, che si assume come misura di $\mathcal{S}$.

Se $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ sono punti distinti del piano, la misura del segmento che li ha per estremi si dice *distanza* fra $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$, e si indica con $d(\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2})$. Conviene definire la distanza tra punti anche nel caso in cui questi coincidano; se $\mathbf{P}$ è un punto del piano, si pone $d(\mathbf{P}, \mathbf{P}) = 0$.

Si può dimostrare il seguente importante teorema:

Teorema 10.2.1

Esiste una corrispondenza biunivoca $\mathbf{f}$ tra l'insieme $\mathcal{R}$ dei punti della retta e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Fissati in $\mathcal{R}$ due punti $\mathbf{O}$ (*origine*) e $\mathbf{U}$ (*punto unità*), $\mathbf{f}$ resta univocamente determinata dalle condizioni

(i) $\mathbf{f}(\mathbf{O}) = 0$;

(ii) $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = 1$;

(iii) comunque presi $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2} \in \mathcal{R}$, il segmento $\overline{\mathbf{P_1 P_2}}$ ha misura $|\mathbf{f}(\mathbf{P_1}) - \mathbf{f}(\mathbf{P_2})|$ rispetto all'unità di misura $\overline{\mathbf{OU}}$.

Una corrispondenza biunivoca fra $\mathcal{R}$ e $\mathbb{R}$ che verifichi le condizioni (i), (ii) e (iii) del teorema 10.2.1 si dice un *sistema di riferimento cartesiano* su $\mathcal{R}$, oppure un *sistema di ascisse* su $\mathcal{R}$; per il teorema 10.2.1, essa resta completamente individuata dalla scelta dei punti $\mathbf{O}$ e $\mathbf{U}$.

Osservazione 10.2.2

Sia $\mathbf{f}$ un sistema di riferimento cartesiano su $\mathcal{R}$. La funzione inversa $\mathbf{f}^{-1}$ (cfr. 4.6) è una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}$ e $\mathcal{R}$ che "estende" la rappresentazione dei numeri razionali descritta in 1.8.

10.3 - La radice n-sima di un numero reale.

Sia $a \in \mathbb{R}^+$, e sia $n \in \mathbb{N}$. Si dice *radice* n*-sima* di a, e si indica con $\sqrt[n]{a}$, un numero reale $r \geq 0$ tale che sia $r^n = a$.

Teorema 10.3.1

Per ogni $a \in \mathbb{R}^+$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una e una sola radice n-sima di a.

Cenno sulla dimostrazione – Sia $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^+ / x^n \leq \mathrm{a}\}$. L'insieme $\mathbf{X}$ è superiormente limitato (da a se $a > 1$, da 1 altrimenti) e dunque ha un estremo superiore x_0: si dimostra che $x_0^n = a$ mostrando che non può essere $x_0^n < a$ né $x_0^n > a$ (nel caso $n = 2$, tale dimostrazione è identica a quella che abbiamo visto in 5.6.4).

Che la radice n-sima di a sia unica segue poi dal fatto che $(0 < x < y) \Rightarrow (x^n < y^n)$.

La nozione di *radice n-sima* si estende ai numeri reali negativi **quando n è dispari**, ponendo per $a < 0$ e n dispari $\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}$.

10.4 - Potenze in $\mathbb{R}$.

Sia b un numero reale, e sia α un numero naturale.

Se $\alpha \geq 2$, si dice *potenza* di *base* b ed *esponente* α, e si indica con b^α, il prodotto di α fattori uguali a b. Si pone poi $b^1 := b$ e $b^0 := 1$.

Si dimostra facilmente che, comunque presi $a, b \in \mathbb{R}$ e comunque presi $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$, valgono le proprietà

10.4.P1 $\quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;

10.4.P2 $\quad a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$;

10.4.P3 $\quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Sia b un numero reale, e sia α un numero intero positivo.

Si dice *potenza* di *base* b ed *esponente* $-\alpha$, e si indica con $b^{-\alpha}$, il reciproco della potenza di base b ed esponente α, ossia $b^{-\alpha} := (b^\alpha)^{-1}$.

Si dimostra facilmente che continuano a valere le proprietà 10.4.P1, 10.4.P2 e 10.4.P3 comunque presi $a, b \in \mathbb{R}$ e comunque presi $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Teorema 10.4.1

Siano $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ e $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ tali che $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$. Per ogni $b \in \mathbb{R}^+$, si ha

$$\sqrt[n_1]{b^{m_1}} = \sqrt[n_2]{b^{m_2}}.$$

Dimostrazione — Procediamo per assurdo, e supponiamo che sia (ad esempio)

$$\sqrt[n_1]{b^{m_1}} < \sqrt[n_2]{b^{m_2}}.$$

Poiché $\sqrt[n_1]{b^{m_1}}$ e $\sqrt[n_2]{b^{m_2}}$ sono per definizione maggiori di zero, si ha allora (per la (vi) del teorema 9.4.8)

$$\left(\sqrt[n_1]{b^{m_1}}\right)^{n_1 n_2} < \left(\sqrt[n_2]{b^{m_2}}\right)^{n_1 n_2}.$$

D’altro lato, per la 10.4.P3,

$$\left(\sqrt[n_1]{b^{m_1}}\right)^{n_1 n_2} = \left(\left(\sqrt[n_1]{b^{m_1}}\right)^{n_1}\right)^{n_2} = (b^{m_1})^{n_2} = b^{m_1 n_2}$$

e analogamente

$$\left(\sqrt[n_2]{b^{m_2}}\right)^{n_1 n_2} = \left(\sqrt[n_2]{b^{m_2}}\right)^{n_2 n_1} = \left(\left(\sqrt[n_2]{b^{m_2}}\right)^{n_2}\right)^{n_1} = (b^{m_2})^{n_1} = b^{m_2 n_1}.$$

Pertanto $b^{m_1 n_2} < b^{m_2 n_1}$, e ciò è assurdo perché per ipotesi $m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Sia ora b un numero reale <u>positivo</u>, e sia α un numero razionale, $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$.

Si dice *potenza* di *base* b ed *esponente* α, e si indica con b^α, la radice n-sima (cfr. 10.3) della potenza di base b ed esponente m, ossia

$$b^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{b^m}.$$

Per il teorema 10.4.1, la definizione data non dipende dalla particolare frazione $\frac{m}{n}$ scelta per rappresentare α. Si può dimostrare che continuano a valere le proprietà 10.4.P1, 10.4.P2 e 10.4.P3 comunque presi $a, b \in \mathbb{R}^+$ e comunque presi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Sia b un numero reale maggiore di 1, e sia α un numero reale. L’insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = b^t \text{ con } t \text{ numero (reale) razionale minore o uguale ad } \alpha\}$$

non è vuoto, e (si può dimostrare che) è superiormente limitato da ogni numero reale della forma b^n con n numero (reale) razionale maggiore di α. Tale insieme ha pertanto estremo superiore. Si dice *potenza* di *base* b ed *esponente* α, e si indica con b^α, l’estremo superiore di tale insieme, ossia

$$b^\alpha := \sup \{x \in \mathbb{R} \;/\; x = b^t \text{ con } t \text{ numero (reale) razionale minore o uguale ad } \alpha\}.$$

Sia b un numero reale positivo minore di 1, e sia α un numero reale. L'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = b^t \text{ con } t \text{ numero (reale) razionale minore o uguale ad } \alpha\}$$

non è vuoto, e (si può dimostrare che) è inferiormente limitato da ogni numero reale della forma b^n con n numero (reale) razionale maggiore di α. Tale insieme ha pertanto estremo inferiore. Si dice *potenza* di *base* b ed *esponente* α, e si indica con b^α, l'estremo inferiore di tale insieme, ossia

$$b^\alpha := \inf\,\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = b^t \text{ con } t \text{ numero (reale) razionale minore o uguale ad } \alpha\}.$$

Si pone infine $1^\alpha := 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Si è così definita la potenza di base b ed esponente α per ogni numero reale positivo b e per ogni numero reale α. Si noti che tale potenza risulta sempre essere un numero reale positivo.

Si può dimostrare che continuano a valere le proprietà $\boxed{\text{10.4.P1}}$, $\boxed{\text{10.4.P2}}$ e $\boxed{\text{10.4.P3}}$ comunque presi $a, b \in \mathbb{R}^+$ e comunque presi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Teorema 10.4.2}}$

Sia b un numero reale positivo diverso da 1. L'applicazione $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{b}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definita ponendo $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{b}}(x) := b^x$ è un isomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{R},\ +)$ e $(\mathbb{R}^+,\ \cdot)$.

Dimostrazione — Poiché $b > 0$, $\mathcal{D}(\mathbf{exp}_{\boldsymbol{b}}) = \mathbb{R}$; per la $\boxed{\text{10.4.P2}}$, $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{b}}$ è un omomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{R},\ +)$ e $(\mathbb{R}^+,\ \cdot)$. Omettiamo la dimostrazione della iniettività e della suriettività di $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{b}}$.

Sia b un numero reale positivo diverso da 1, e sia $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{b}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ l'isomorfismo considerato nel teorema 10.4.2. La funzione inversa (cfr. 4.6) è un isomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{R}^+,\ \cdot)$ e $(\mathbb{R},\ +)$ che si dice *logaritmo in base* b e si indica con $\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}$. Si ha dunque

$$y = \mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(x) \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x.$$

$\boxed{\text{Teorema 10.4.3}}$

Siano a, b numeri reali positivi diversi da 1. Per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, si ha

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(x) = \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(x)}{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(b)}.$$

Dimostrazione — Dobbiamo provare che $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(x) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(b) \cdot \mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(x)$, ossia che

$$a^{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(b) \cdot \mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(x)} = x.$$

In effetti, $$a^{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(b) \cdot \mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(x)} = \left(a^{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(b)}\right)^{\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(x)} = b^{\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(x)} = x$$

come si voleva.

10.5 - L'insieme $\mathbb{R}^n$.

Sia n un numero intero positivo.

Coerentemente con quanto già stabilito in 3.9, diremo *n-pla ordinata di numeri reali* un ente caratterizzato da $\boldsymbol{n}$ numeri reali (detti *componenti* dell'n-pla) e dall'ordine in cui questi vengono considerati. L'insieme di tutte le n-ple ordinate di numeri reali si indica con $\mathbb{R}^n$.

Gli elementi di $\mathbb{R}^2$ (cioè, le 2-ple ordinate di numeri reali) si dicono *coppie ordinate di numeri reali*. Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ (cioè, le 3-ple ordinate di numeri reali) si dicono *terne ordinate di numeri reali*.

$\boxed{\text{Esempio 10.5.1}}$

Sono coppie ordinate di numeri reali: $(\pi, \frac{3}{2})$; $(-5, 12)$; $(\sqrt{7} - 2, \pi^5 + \sqrt{3})$.

Sono terne ordinate di numeri reali: $(1, 0, -3)$; $(\sqrt{\pi} + 1, 125, \frac{7}{15})$; $(-2, -12, 8)$.

Sono 4-ple ordinate di numeri reali: $(\frac{\sqrt{5}-2+\pi}{\sqrt{3}}, 7, -13, 414)$; $(1, 0, -1, 0)$; $(\sqrt{2}, \pi, -1, \sqrt{3})$.

Sia n un numero intero positivo.

Nell'insieme $\mathbb{R}^n$ è utile definire un'operazione (cfr. 7.1) detta *somma* e indicata con $+$, ponendo:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \ .$$

Si definisce anche il *prodotto* di un elemento di $\mathbb{R}^n$ per un numero reale, ponendo:

$$\lambda\,(a_1, a_2, \dots, a_n) := (\lambda\,a_1, \lambda\,a_2, \dots, \lambda\,a_n)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Si noti che questo "prodotto" <u>non</u> è un'operazione nel senso definito in 7.1.

$\boxed{\text{Esempio 10.5.2}}$

Si ha $(1, -2, 3) + (3, 3, -1) = (4, 1, 2)$ e $(5, \pi, -1, 6) + (3, -\pi, 3, 1) = (8, 0, 2, 7)$.

La scrittura $(1, -2, 3) + (5, \pi, -1, 6)$ non ha senso (infatti si è definita la somma in $\mathbb{R}^n$ per ogni numero intero positivo n ma non si è definita la somma fra un elemento di $\mathbb{R}^n$ e un elemento di $\mathbb{R}^m$ quando $n \neq m$).

Si ha $3\,(-1, 2, 4) = (-3, 6, 12)$ e $\pi\,(1, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}) = (\pi, 0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$.

11.- CARDINALITÀ

11.1 - Equipotenza.

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ insiemi.

Si dice che $\mathbf{A}$ è *equipotente* a $\mathbf{B}$ se esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Osservazione 11.1.1

Ogni insieme è equipotente a se stesso.

Dimostrazione – Sia $\mathbf{A}$ un insieme: la funzione $\mathbf{id_A}$ definita in 4.4.3 è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$.

Osservazione 11.1.2

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ insiemi. Se $\mathbf{A}$ è equipotente a $\mathbf{B}$, allora $\mathbf{B}$ è equipotente ad $\mathbf{A}$.

Dimostrazione – Se $\mathbf{f}{:}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ è una corrispondenza biunivoca, $\mathbf{f}^{-1}{:}\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ è una corrispondenza biunivoca (cfr. 4.6).

Osservazione 11.1.3

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ insiemi. Se $\mathbf{A}$ è equipotente a $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}$ è equipotente a $\mathbf{C}$, allora $\mathbf{A}$ è equipotente a $\mathbf{C}$.

Dimostrazione – Se $\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e $\mathbf{g} : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ sono corrispondenze biunivoche, $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ è una corrispondenza biunivoca (cfr. esercizio 4.7.5).

11.2 - Cardinalità.

Per quanto osservato in 11.1.1, 11.1.2 e 11.1.3, in ogni insieme i cui elementi siano insiemi la relazione di "equipotenza" (definita in accordo con 11.1) è una relazione di equivalenza. Questo fatto suggerisce intuitivamente che tutti gli insiemi tra loro equipotenti abbiano in comune una proprietà astratta, che diremo *cardinalità*. Osserviamo esplicitamente che per il teorema 3.3.3 non è possibile dare una definizione di cardinalità mediante il procedimento visto in 6.3.

Per "misurare" la cardinalità di un insieme dovremo considerare degli insiemi – campione a due a due non equipotenti. Per ogni numero naturale n, sia

$$\mathbf{I}_n = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq n\}.$$

Gli insiemi $\mathbf{I}_n$, l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{R}$ sono tutti a due a due non equipotenti (cfr. teorema 11.3.3).

Sia **A** un insieme. Se **A** è equipotente a $\mathbf{I}_n$ per un certo numero naturale n, diremo che *ha cardinalità* n e scriveremo $|\mathbf{A}| = n$. Se **A** è equipotente a $\mathbb{N}$, diremo che *ha cardinalità* $\aleph_0$ (si legge: aleph con zero) oppure che *è numerabile* e scriveremo $|\mathbf{A}| = \aleph_0$. Se **A** è equipotente a $\mathbb{R}$, diremo che *ha la potenza del continuo* e scriveremo $|\mathbf{A}| = c$.

L'insieme **A** si dice *finito* se è equipotente a $\mathbf{I}_n$ per un certo numero naturale n; si dice *infinito* se non è finito.

Esempio 11.2.1

Il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ costituito dai numeri pari ha cardinalità $\aleph_0$.

Dimostrazione – La funzione definita in 4.4.1 è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri naturali pari.

Raccogliamo qui di seguito alcuni importanti risultati sulla cardinalità degli insiemi; si vedano anche i teoremi 11.3.2, 11.3.3 e 11.3.5.

Teorema 11.2.2

$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 11.2.3

Se $|\mathbf{A}| = n$ con $n \in \mathbb{N}$, si ha $|\mathcal{P}(\mathbf{A})| = 2^n$.

Dimostrazione — Si veda il teorema 12.4.7.

Teorema 11.2.4

L'insieme dei numeri reali algebrici (cfr. 10.1) ha cardinalità $\aleph_0$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 11.2.5

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ insiemi finiti, con $|\mathbf{A}| = n$ e $|\mathbf{B}| = m$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Si ha

$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = nm\,.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 11.2.6

Il sottoinsieme $(0, 1)$ di $\mathbb{R}$ è equipotente a $\mathbb{R}$.

Dimostrazione — È facile verificare che la funzione

$$\mathbf{f}(\mathrm{x}) = \pi\mathrm{x} - \tfrac{\pi}{2}$$

è una corrispondenza biunivoca tra $(0, 1)$ e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. D'altro lato, è noto dallo studio della trigonometria che la funzione **tg**(x) ("tangente trigonometrica") è una corrispondenza biunivoca tra $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbb{R}$. Per l'osservazione 11.1.3 si ha l'asserto.

11.3 - Confronto tra cardinalità.

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ insiemi.

Se $\mathbf{A}$ è equipotente a un sottoinsieme di $\mathbf{B}$, scriveremo $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ (si dice talvolta in questo caso che $\mathbf{B}$ *domina* $\mathbf{A}$). Se $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ e $\mathbf{A}$ non è equipotente a $\mathbf{B}$, scriveremo $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$.

In ogni insieme i cui elementi siano insiemi, $\preceq$ definisce una relazione evidentemente riflessiva e transitiva. Tale relazione non può in generale essere però antisimmetrica; infatti, se $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sono insiemi distinti equipotenti si ha $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \preceq \mathbf{A}$ ma $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$. Vale comunque il seguente famoso teorema, la cui dimostrazione esula dai limiti di questi appunti:

Teorema 11.3.1 (Schröder-Bernstein)

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ insiemi. Se $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \preceq \mathbf{A}$, allora $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono equipotenti.

Teorema 11.3.2

Se **A** è un insieme infinito, e **B** è un insieme tale che $\mathbf{B} \preceq \mathbf{A}$, si ha $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 11.3.3

$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Mostriamo ora che esistono infinite cardinalità infinite.

Teorema 11.3.4 (Cantor)

Per ogni insieme **A**, è $\mathbf{A} \prec \mathcal{P}(\mathbf{A})$.

Dimostrazione - La funzione che all'elemento **x** di **A** associa l'elemento $\{\mathbf{x}\}$ di $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ è evidentemente una corrispondenza biunivoca tra **A** e un sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathbf{A})$; dunque, $\mathbf{A} \preceq \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Resta da provare che **A** non è equipotente a $\mathcal{P}(\mathbf{A})$.

In effetti, non può esistere alcuna funzione suriettiva da **A** a $\mathcal{P}(\mathbf{A})$. Sia infatti $\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Posto

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{a} \in \mathbf{A} \;/\; \mathbf{a} \notin \mathbf{f}(\mathbf{a})\}$$

non esiste alcun elemento **x** in **A** per il quale si abbia $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}$. (Per un tale **x** non potrebbe essere $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, perché ne seguirebbe $\mathbf{x} \notin \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}$, né $\mathbf{x} \notin \mathbf{X}$, perché -essendo $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$- ne seguirebbe $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$).

Teorema 11.3.5

$\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

Dimostrazione - L'asserto segue immediatamente dai teoremi 11.3.3 e 11.3.4.

Esiste un insieme **A** tale che $\mathbb{N} \prec \mathbf{A} \prec \mathbb{R}$? La supposizione che un tale insieme non esista è nota come *ipotesi del continuo*. L'*ipotesi generalizzata del continuo* afferma che per nessun insieme infinito **X** esiste un insieme **A** tale che $\mathbf{X} \prec \mathbf{A} \prec \mathcal{P}(\mathbf{X})$.

Esercizio 11.3.6

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ insiemi, e siano $\mathbf{A'}, \mathbf{B'}$ insiemi equipotenti rispettivamente ad **A** e **B**. Si provi che $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ se e solo se $\mathbf{A'} \preceq \mathbf{B'}$. Se ne deduca che è lecito convenire di scrivere $|\mathbf{A}| \leq |\mathbf{B}|$ quando $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$.

12.- ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO

12.1 - Introduzione.

Sia dato un numero finito n di oggetti ($n \in \mathbb{N}$). A partire da questi, si possono con vari criteri individuare "raggruppamenti" (espressione volutamente vaga, che potremo precisare solo caso per caso) di k oggetti ($k \in \mathbb{N}$). Ad esempio:

- scegliere k oggetti, anche ripetuti;
- scegliere k oggetti tutti distinti fra loro (in questo caso dovrà essere $k \leq n$);
- come sopra, e inoltre stabilire un ordinamento degli oggetti scelti.

In ciascuno di questi casi, fissato cioè un certo criterio di formazione dei raggruppamenti, ha interesse chiedersi quanti distinti raggruppamenti si possono formare col criterio dato (che cosa si debba intendere per "distinti" dipende dal criterio di formazione scelto). Il "calcolo combinatorio" risponde a questa domanda, fornendo in funzione di n e k il numero dei "raggruppamenti distinti" che si possono formare in base a ciascuno dei criteri sopra elencati.

In tutto questo capitolo, *supporremo fissato un insieme finito* $\mathbf{A}_n = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$. È ovvio, e lo osserviamo una volta per tutte, che quanto diremo non dipende in alcun modo dalla "natura" degli elementi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ma solo dal numero naturale n; in particolare, non perdiamo in generalità nel ragionamento "etichettando" gli elementi di $\mathbf{A}_n$ con i numeri naturali da 1 a n (come abbiamo fatto apponendovi l'indice).

12.2 - k-disposizioni con ripetizione.

Quante "colonne" bisogna giocare al "Totocalcio" per essere sicuri di "fare 14"? Tutte quelle possibili, ovviamente. E quante sono?

Abbiamo qui un insieme di tre "oggetti" (i simboli "1", "X", "2"): usandoli anche ripetutamente dobbiamo formare tutti i possibili raggruppamenti di 14 oggetti ordinati in tutti i modi possibili. Il primo oggetto può essere scelto in tre modi diversi. Poiché ogni oggetto può apparire anche più volte, per ciascuna di queste tre scelte ve ne sono tre possibili per il secondo oggetto; per ciascuna delle nove $(= 3 \cdot 3)$ possibilità così ottenute ve ne sono tre per la scelta del terzo oggetto; e così via, ottenendo in tutto $3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^{14}$ $(= 4.782.969)$ possibili "colonne" del "Totocalcio". Formalizziamo ora questo ragionamento per il caso generale.

Sia k un numero naturale.

Si dice *k-disposizione* (*con ripetizione*) di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (o anche *disposizione di* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *a k a k*) ogni k-pla ordinata di elementi di $\mathbf{A}_n$ (cioè ogni elemento del prodotto cartesiano $(\mathbf{A}_n)^k$).

Naturalmente l'espressione "con ripetizione" (che infatti abbiamo scritto fra parentesi) sta ad indicare la possibilità, non l'obbligatorietà che qualche elemento di $\mathbf{A}_n$ compaia più volte nella k-pla; le "ripetizioni" sono forzate solo se $k > n$ (come nell'esempio sopra).

Teorema 12.2.1

Sia k un numero intero positivo.

Il numero delle k-disposizioni (con ripetizione) di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ è n^k.

Dimostrazione — Si tratta di provare che $|(\mathbf{A}_n)^k| = n^k$. Ciò si prova facilmente per induzione su n osservando che per due insiemi finiti $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ si ha $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

Esercizio 12.2.2

Il codice di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di cinque caratteri alfanumerici (lettere dell'alfabeto inglese e cifre). Quanti sono i codici possibili?

Soluzione — Sono tanti quante le disposizioni con ripetizione di 36 $(= 26 + 10)$ oggetti a 5 a 5, cioè $36^5 = 60.466.176$.

Esercizio 12.2.3

In una nazione, le automobili sono targate con sequenze ordinate di sei cifre; in un'altra, con sequenze ordinate di cinque caratteri alfanumerici escludendo le lettere "I", "O", "Q", "B" che possono dar luogo ad ambiguità di lettura da lontano. Quante auto possono essere targate con questi metodi?

Soluzione — Col primo metodo si possono targare 10^6 $(= 1.000.000)$ auto; col secondo, $32^5 = 33.554.432$.

12.3 - *k*-disposizioni semplici.

Supponiamo che ad una gara di atletica partecipino otto atleti. Quante sono le possibili disposizioni degli atleti sul podio al termine della gara? Prescindiamo naturalmente dalle capacità agonistiche degli atleti.

Abbiamo qui un insieme di otto elementi (gli atleti) con i quali dobbiamo formare tutti i possibili raggruppamenti costituiti da tre elementi distinti ordinati in tutti i modi possibili. Il primo atleta può essere scelto in otto modi diversi; per ciascuna di queste otto scelte ve ne sono sette possibili per il secondo; per ciascuna delle 56 $(= 7 \cdot 8)$ possibilità così ottenute ve ne sono 6 per la scelta del terzo atleta. Si ottengono in tutto $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ possibili disposizioni.

Le disposizioni che abbiamo considerato con questo esempio sono particolari k-disposizioni: in esse infatti gli elementi che compaiono sono tutti distinti; esse si dicono k-disposizioni semplici. Ne diamo adesso la definizione precisa.

Sia k un numero naturale minore o uguale a n.

Si dice *k-disposizione semplice* di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (o anche *disposizione semplice di* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *a k a k*) ogni k-pla ordinata di elementi di $\mathbf{A}_n$ tutti distinti fra loro.

Quante sono le k-disposizioni semplici di n oggetti? A differenza di quanto avviene per le disposizioni con ripetizione, nel formare una k-disposizione semplice si può scegliere in n modi diversi soltanto il primo elemento; per la scelta del secondo si hanno $n-1$ possibilità, per quella del terzo $n-2$, e così via fino al k-simo per il quale si hanno soltanto $n-(k-1)$ possibilità. Esistono perciò in tutto $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ k-disposizioni semplici di n oggetti.

Teorema 12.3.1

Sia k un numero intero positivo minore o uguale a n.
Il numero delle k-disposizioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ è $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Dimostrazione — Il ragionamento che abbiamo fatto sopra può essere formalizzato procedendo per induzione. Basta osservare che da ogni $(k-1)$-disposizione semplice di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ si può ottenere una k-disposizione semplice "aggiungendo" uno dei restanti $n-(k-1)$ $(= n-k+1)$ elementi: con questa costruzione, ogni $(k-1)$-disposizione semplice dà luogo a $n-k+1$ k-disposizioni distinte; d'altro lato, $(k-1)$-disposizioni semplici distinte danno luogo a k-disposizioni semplici distinte (perchè differiscono in uno dei primi $k-1$ elementi). Dunque, se il numero delle $(k-1)$-disposizioni semplici distinte è $\mathbf{D}_{k-1}$, il numero delle k-disposizioni semplici è $(n-k+1) \cdot \mathbf{D}_{k-1}$.

Procediamo allora per induzione su k. Se $k=1$, è immediato che le 1-disposizioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ sono n. Supponiamo allora (ipotesi di induzione) che le h-disposizioni semplici siano $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-h+1)$; per quanto sopra osservato, le $(h+1)$-disposizioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ sono $\big(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-h+1)\big) \cdot (n-h)$, come si voleva.

Esercizio 12.3.2

Quante bandiere tricolori (formate da tre bande verticali colorate) si possono formare con cinque colori assegnati?

Soluzione — La risposta è $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Particolare importanza riveste il caso $k = n$: il problema non è in questo caso quello di <u>scegliere</u> gli elementi (vanno presi tutti!) ma quello di <u>ordinarli</u>. Il numero dei modi distinti in cui ciò si può fare è $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, cioè il prodotto dei primi n numeri naturali: tale numero si indica con

$$n! \quad \text{(leggi: “}n\text{ fattoriale”)}.$$

Osservazione 12.3.3

Ricordiamo (cfr. 4.4) che si dice *permutazione* su $\mathbf{A}_n$ ogni corrispondenza biunivoca $\mathbf{A}_n \to \mathbf{A}_n$. Ogni permutazione π di $\mathbf{A}_n$ individua una n-disposizione semplice di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, precisamente la

$$(\ \pi(\mathbf{a}_1), \pi(\mathbf{a}_2), \ldots, \pi(\mathbf{a}_n)\ );$$

è chiaro che permutazioni distinte individuano n – disposizioni distinte e che si ottengono così tutte le n – disposizioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Dunque i due concetti (permutazione su $\mathbf{A}_n$, n-disposizione semplice di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$) si possono identificare.

Con la notazione sopra introdotta, e ponendo per comodità $0! = 1$, possiamo riformulare l'enunciato del teorema 12.3.1:

Teorema 12.3.4

Sia k un numero intero positivo minore o uguale a n.
Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti a k a k è $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.
In particolare, il numero delle permutazioni su n oggetti è $n!$.

Esercizio 12.3.5

Quante sono le possibili classifiche finali di un campionato di calcio a 20 squadre? Naturalmente prescindiamo, anche qui, dalle capacità agonistiche delle squadre.

Soluzione — La risposta è: $20!$ ($\simeq 2{,}433 \cdot 10^{18}$).

Esercizio 12.3.6

Una certa emittente televisiva privata trasmette solo film. In quanti modi diversi può organizzare un palinsesto di 5 film scegliendoli tra 7 titoli?

Soluzione — La risposta è $\frac{7!}{2!}$ $(= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2.520)$.

Esercizio 12.3.7

Quanti anagrammi (a prescindere dal senso) si possono ottenere dalla parola “ramo”? E quanti dalla parola “mamma”?

Soluzione — Gli anagrammi di “ramo” sono tanti quante le permutazioni su 4 oggetti, ossia $4!$ $(= 24)$. Se anagrammiamo la parola “mamma”, non ha senso distinguere fra loro gli anagrammi che differiscono per una permutazione sulle tre “m”, o quelli che differiscono per una permutazione sulle due “a”.

Si ottengono dunque $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$ anagrammi distinti.

12.4 - *k*-combinazioni semplici.

Supponiamo che un giornale quotidiano lanci un concorso basato sulle quotazioni in borsa di 48 titoli numerati da 1 a 48. Vengono distribuite tesserine contenenti ciascuna 8 numeri diversi compresi tra 1 e 48; quante diverse tesserine possono essere distribuite? Si noti che i numeri su ciascuna tesserina sono sempre disposti in ordine strettamente crescente: ciò significa che dobbiamo formare tutti i possibili raggruppamenti di 8 numeri distinti (scelti tra 1 e 48) senza poterli distinguere in base all’ordine dei numeri (perché tale ordine resta univocamente determinato dalla scelta dei numeri).

Sia k un numero naturale minore o uguale a n.

Si dice *k-combinazione semplice* di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (o anche *combinazione semplice di* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *a k a k*) ogni k-pla ordinata $(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k})$ per la quale sia $\mathbf{i}_1 < \mathbf{i}_2 < \dots < \mathbf{i}_k$.

È utile (lo vedremo più avanti) formalizzare la definizione di k-combinazione semplice utilizzando, come abbiamo fatto, la nozione di k-pla ordinata; bisogna però aver ben chiaro che l’ordinamento è determinato dagli elementi, e quindi le k-combinazioni semplici sono individuate solo dalla scelta degli elementi, e non dal loro ordinamento. Lo ribadiamo col seguente teorema:

Teorema 12.4.1

Le k-combinazioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi di $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ che hanno cardinalità k.

Dimostrazione — Sia $\mathcal{C}$ l'insieme delle k-combinazioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, e sia $\mathcal{S}$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbf{A}_n$ formati da k elementi.

Sia $\mathbf{f}: \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ la funzione che alla k-combinazione semplice $(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k})$ associa l'insieme $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}\}$ (poiché per ipotesi $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, gli elementi $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ sono tutti distinti e dunque effettivamente $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}\} \in \mathcal{S}$).

Proviamo che $\mathbf{f}$ è suriettiva: se $\{\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \dots, \mathbf{a}_{j_k}\} \in \mathcal{S}$, riordinando opportunamente i suoi elementi possiamo ottenere una k-combinazione semplice, la cui immagine mediante $\mathbf{f}$ è proprio $\{\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \dots, \mathbf{a}_{j_k}\}$.

Proviamo infine che $\mathbf{f}$ è iniettiva: k-combinazioni semplici che hanno la stessa immagine mediante $\mathbf{f}$ sono formate dagli stessi elementi; poiché tali elementi possono essere ordinati <u>in</u> <u>un</u> <u>solo</u> <u>modo</u> rispettando la condizione che gli indici siano strettamente crescenti, le k-combinazioni semplici da cui eravamo partiti devono coincidere.

Teorema 12.4.2

Sia k un numero naturale minore o uguale a n.
Il numero delle k-combinazioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ è $\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Dimostrazione — Sia $\mathcal{D}$ l'insieme delle k-disposizioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Definiamo in $\mathcal{D}$ la seguente relazione:

$$(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}) \sim (\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \dots, \mathbf{a}_{j_k})$$

se e solo se esiste una permutazione π su $i_1, i_2, \dots, i_k$ tale che

$$\pi(i_1) = \mathbf{j}_1, \pi(i_2) = \mathbf{j}_2, \dots, \pi(i_k) = \mathbf{j}_k.$$

Si verifica facilmente che $\sim$ è una relazione di equivalenza su $\mathcal{D}$, e che ogni k-combinazione semplice appartiene ad una e una sola classe di equivalenza. Ogni classe di equivalenza ha $k!$ elementi (perchè le permutazioni su k oggetti sono $k!$, cfr. 12.3.4), dunque le classi di equivalenza sono

$$\frac{|\mathcal{D}|}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\ .$$

Questo è anche il numero delle k-combinazioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Sia k un numero naturale minore o uguale a n. Il numero

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

si indica con $\binom{n}{k}$ (leggi: "n su k"). Tutti i numeri della forma $\binom{n}{k}$ (con $k \le n$) si dicono *coefficienti binomiali*.

Possiamo così riformulare il teorema 12.4.2:

Teorema 12.4.3

Sia k un numero naturale minore o uguale a n.
Il numero delle $k-$combinazioni semplici di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ è $\binom{n}{k}$.

Esempio 12.4.4

Il numero delle tesserine contenenti ciascuna 8 diversi numeri naturali compresi tra 1 e 48 è $\binom{48}{8} = \frac{48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = 377.348.994.$

Il teorema che segue espone le relazioni più importanti che intercorrono fra i coefficienti binomiali: su di esse, fra l'altro, è fondata la regola pratica per il calcolo dei coefficienti binomiali.

Teorema 12.4.5

Sia k un numero naturale minore o uguale a n. Si ha

$$(a)\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \qquad\qquad (b)\quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};$$

$$(c)\quad k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot\binom{n-1}{k-1}; \qquad\qquad (d)\quad \binom{n}{0} = 1.$$

Dimostrazione — Si tratta di semplici verifiche.

Proviamo la (a).

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Proviamo la (b). Si ha

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\,.$$

Riduciamo allo stesso denominatore le due frazioni al secondo membro; a tale scopo, moltiplichiamo la prima per $\frac{n-k}{n-k}$ e la seconda per $\frac{k}{k}$.

Si ottiene

$$\frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{(n-1)!\cdot(n-k+k)}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

Proviamo la (c). Si ha

$$k\cdot\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

Proviamo infine la (d). Si ha

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1.$$

Applicando le relazioni espresse dal teorema 12.4.5 si costruisce il *triangolo di Tartaglia* (detto anche *triangolo di Pascal*), riportando su righe successive i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ in modo che (numerando le righe con 0, 1, 2, $\dots$) la riga n-sima consista nell'ordine dei numeri $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

Precisamente:

– Il primo e ultimo numero di ogni riga è 1 (per la (c) del teorema 12.4.5, tenendo conto della (a));

– Ogni numero di ciascuna riga, eccetto il primo e l'ultimo, è la somma dei due numeri immediatamente soprastanti (per la (b) del teorema 12.4.5);

– Lo schema è simmetrico rispetto a un asse di simmetria verticale (per la (a) del teorema 12.4.5).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}$$

....

Teorema 12.4.6

Sia $(\mathbf{F}, +, \cdot)$ un campo. Se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{F}$, si ha

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^n = \binom{n}{0}\mathbf{a}^n + \binom{n}{1}\mathbf{a}^{n-1}\mathbf{b} + \ldots + \binom{n}{n-1}\mathbf{a}\mathbf{b}^{n-1} + \binom{n}{n}\mathbf{b}^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{a}^{n-k}\mathbf{b}^k.$$

Dimostrazione — Valutiamo il polinomio $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^n$. Si ha

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^n = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot \ldots \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \qquad (n \text{ volte}).$$

L'espressione al secondo membro si sviluppa nella somma di prodotti ottenuti scegliendo uno dei due termini $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ per ciascuno degli n fattori in tutti i modi possibili. Tali prodotti, per la proprietà commutativa della moltiplicazione, si possono scrivere tutti nella forma $\mathbf{a}^k\mathbf{b}^{n-k}$ (notiamo che la somma degli esponenti deve essere n).
Fissiamo l'attenzione su un particolare valore di k: quante diverse scelte dei termini $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ danno luogo al prodotto $\mathbf{a}^k\mathbf{b}^{n-k}$? "Etichettiamo" ogni fattore $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ con un $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; ogni scelta che comprende <u>esattamente</u> k volte "**a**" corrisponde a un sottoinsieme di $\mathbf{A}_n$ di cardinalità k (formato da quei k elementi che "etichettano" i fattori dai quali è stato scelto "**a**"): dunque (per 12.4.1 e 12.4.3) nello sviluppo di $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^n$ vi sono esattamente $\binom{n}{k}$ termini della forma $\mathbf{a}^k\mathbf{b}^{n-k}$. Da ciò segue l'asserto.

I numeri della forma $\binom{n}{k}$ con $n, k \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$ si dicono *coefficienti binomiali* proprio perché compaiono come coefficienti nello sviluppo della potenza n-sima del binomio $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Teorema 12.4.7

$|\mathcal{P}(\mathbf{A}_n)| = 2^k$.

Dimostrazione — Per ogni numero naturale $k \leq n$, esistono esattamente $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di $\mathbf{A}_n$ aventi cardinalità k (cfr. 12.4.1 e 12.4.3). Dunque,

$$|\mathcal{P}(\mathbf{A}_n)| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

D'altro lato, applicando in $\mathbb{R}$ il teorema 12.4.6 con $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$, si ottiene

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

12.5 - *k*-combinazioni con ripetizione.

Supponiamo di avere a disposizione una quantità illimitata di palline di tre colori: rosso, verde, azzurro. Quanti sacchetti "diversi" di sette palline possiamo formare? (Due sacchetti si considerano "diversi" se differiscono per il numero delle palline di uno almeno dei tre colori). È chiaro che questo non può essere interpretato come un problema di *disposizioni* dei tre colori dati (l'ordine delle palline non conta!); non si tratta però nemmeno di *combinazioni semplici*, perché i colori possono (in questo esempio, devono) essere ripetuti.

Se l'esempio delle palline colorate sembra troppo frivolo, si pensi a quest'altro problema: quanti termini ha il polinomio omogeneo generale di grado sette nelle tre indeterminate x, y, z? La risposta è data dal numero dei monomi "diversi" della forma $\mathrm{x}^{\alpha}\mathrm{y}^{\beta}\mathrm{z}^{\gamma}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ e $\alpha+\beta+\gamma=7$; ciascuno di questi monomi è un "sacchetto" di sette lettere scelte tra x, y, z. Questo problema ha dunque la stessa soluzione del precedente.

Sia k un numero intero positivo.

Si dice *k-combinazione con ripetizione* di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (o anche *combinazione con ripetizione di* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *a* k *a* k) ogni k-pla ordinata $(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k})$ per la quale sia

$$i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k.$$

Notiamo che in questa definizione, come già in quella di k-combinazione semplice, la scelta degli elementi $\mathbf{a}_{i_j}$ determina il loro ordinamento; solo tale scelta caratterizza dunque le k-combinazioni.

Teorema 12.5.1

Sia k un numero intero positivo.
Il numero delle k-combinazioni con ripetizione di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ è $\binom{n+k-1}{k}$.

Dimostrazione – Sia $\mathcal{C}^{(\mathrm{r})}$ l'insieme delle k-combinazioni con ripetizione di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, e sia $\mathcal{K}$ l'insieme delle k-combinazioni semplici di $1, 2, \dots, n+k-1$.
Per provare l'asserto, sarà sufficiente dimostrare che la funzione $\mathbf{f}: (\mathbf{A}_n)^k \to \mathbb{N}^k$ che alla k-pla ordinata $(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_3}, \dots, \mathbf{a}_{i_k})$ associa la k-pla ordinata $(i_1, i_2+1, i_3+2, \dots, i_k+k-1)$ è una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{C}^{(\mathrm{r})}$ e $\mathcal{K}$.
Osserviamo in primo luogo che $\mathbf{f}(\mathcal{C}^{(\mathrm{r})}) \subset \mathcal{K}$. In effetti, se

$$1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le \dots \le i_k \le n,$$

si ha certamente

$$1 \le i_1 < i_2+1 < i_3+2 < \dots < i_k+k-1 \le n+k-1.$$

Inoltre, $\mathbf{f}$ è iniettiva (se due k-combinazioni con ripetizione differiscono per la j-sima componente, ciò avviene anche per le corrispondenti $(n+k-1)$-combinazioni). Resta da provare che $\mathbf{f}$ è suriettiva. Sia $(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \mathcal{K}$; allora

$$1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n+k-1,$$

da cui

$$1 \le j_1 \le j_2-1 \le j_3-2 \le \dots \le j_k-k+1$$

e quindi

$$(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2-1}, \mathbf{a}_{i_3-2}, \dots, \mathbf{a}_{i_k-1}) \in \mathcal{C}^{(\mathrm{r})};$$

ma $\mathbf{f}(\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2-1}, \mathbf{a}_{j_3-2}, \dots, \mathbf{a}_{j_k-k+1}) = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ e l'asserto risulta così completamente provato.

Siamo in grado ora di risolvere il problema (anzi, i due problemi) da cui eravamo partiti.

La risposta è

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36.$$

Esercizio 12.5.2

Quanti sono i numeri di 6 cifre nei quali ogni cifra è maggiore o uguale alla successiva? (Sono esempi di tali numeri: 755420, 555555, 654311.)

Soluzione – I numeri considerati restano individuati dalle 6-combinazioni con ripetizione delle 10 cifre (bisogna escludere la $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, che non corrisponde a un numero di sei cifre); sono dunque

$$\binom{10+6-1}{6} - 1 = \binom{15}{6} - 1 = 5004.$$

12.6 - Esercizi di ricapitolazione.

12.6.1

È dato un insieme finito **X**. Se il numero dei sottoinsiemi di **X** che hanno cardinalità 5 è uguale al numero dei sottoinsiemi di **X** che hanno cardinalità 3, qual è la cardinalità di **X**?

Soluzione – Sia $|\mathbf{X}| = n$. Per ipotesi, $\binom{n}{5} = \binom{n}{3}$, ossia

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot2}$$

da cui

$$(n-3)\cdot(n-4) = 20.$$

Tale equazione di secondo grado nell'incognita n ha la sola radice positiva $n = 8$. Dunque

$$|\,\mathbf{X}\,| = 8.$$

12.6.2

Sono dati nel piano 10 punti, fra i quali non ve ne sono tre allineati. Quante rette si ottengono congiungendoli a due a due? Quanti triangoli hanno tutti i vertici fra quei punti?

Soluzione — Due punti individuano una retta; poiché fra i punti dati non ve ne sono tre allineati, coppie distinte di punti individuano rette distinte. Dunque si ottengono

$$\binom{10}{2} = 45$$

rette.

I triangoli sono individuati dalla scelta dei vertici; il loro numero è quindi

$$\binom{10}{3} = 120.$$

12.6.3

Quanti sono gli ambi che si possono giocare al lotto? Quanti di essi vengono estratti su ogni ruota? E i terni? E le cinquine?

Soluzione — Gli ambi che si possono giocare sono $\binom{90}{2} = 4005$. Di questi ne vengono estratti su ogni ruota $\binom{5}{2} = 10$.

I terni che si possono giocare sono $\binom{90}{3} = 117.480$. Di questi ne vengono estratti su ogni ruota $\binom{5}{3} = 10$.

Le cinquine che si possono giocare sono $\binom{90}{5} = 43.949.268$. Di queste ne viene estratta una su ogni ruota.

13.- SISTEMI DI RIFERIMENTO CARTESIANI NEL PIANO

13.1 - Orientamento della retta e del piano.

Sia $\boldsymbol{r}$ una retta (che, come convenuto in 1.4, pensiamo come insieme di punti). Una relazione $\preceq$ in $\boldsymbol{r}$ si dice un *verso* su $\boldsymbol{r}$ se

(i) $\preceq$ è una relazione di ordine totale in $\boldsymbol{r}$

e inoltre

(ii) comunque presi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \boldsymbol{r}$,
se $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$, allora $\mathbf{A} \preceq \mathbf{P} \preceq \mathbf{B}$ per ogni punto $\mathbf{P}$ del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$.

Una retta si dice *orientata* se è dato su di essa un verso.

Teorema 13.1.1

Sia $\boldsymbol{r}$ una retta, e siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ punti distinti di $\boldsymbol{r}$. Esiste uno e un solo verso su $\boldsymbol{r}$ per il quale

$$\mathbf{A} \prec \mathbf{B}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Sia $\boldsymbol{r}$ una retta, e siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ punti distinti di $\boldsymbol{r}$. Si dice *verso individuato dalla coppia ordinata* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ quel verso su $\boldsymbol{r}$ (univocamente determinato, per il teorema 13.1.1) per il quale $\mathbf{A}$ precede $\mathbf{B}$.

Corollario 13.1.2

Sia $\boldsymbol{r}$ una retta. Esistono esattamente due versi su $\boldsymbol{r}$.

Dimostrazione — Siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ due punti distinti di $\boldsymbol{r}$. Per il teorema 13.1.1, su $\boldsymbol{r}$ esiste esattamente un verso per il quale $\mathbf{A}$ precede $\mathbf{B}$, ed esattamente un verso (necessariamente distinto dal precedente) per il quale $\mathbf{B}$ precede $\mathbf{A}$; ma, d'altro lato, per ogni verso su $\boldsymbol{r}$ deve aversi che $\mathbf{A}$ precede $\mathbf{B}$ oppure $\mathbf{B}$ precede $\mathbf{A}$.

Sia $\boldsymbol{r}$ una retta. I due versi su $\boldsymbol{r}$ si dicono *opposti* l'uno dell'altro.

Osservazione 13.1.3

In qualche occasione (cfr. ad es. 13.3) avremo bisogno di stabilire un *orientamento per il piano*. Non precisiamo qui formalmente, come invece si è fatto per la retta, che cosa significhi *orientare il piano*; diciamo solo, in modo grossolano, che si tratta di stabilire un "buon" criterio che consenta, per ogni terna ordinata di punti non allineati del piano, di dichiararla "positivamente orientata" oppure "negativamente orientata".
Nel seguito accetteremo la seguente convenzione informale. Sia (**A**, **B**, **C**) una terna ordinata di punti non allineati del piano; essi individuano una circonferenza Γ. Se per incontrare **A**, **B**, **C** nell'ordine dato la circonferenza Γ va percorsa nel senso positivo (cioè, in senso antiorario), la terna (**A**, **B**, **C**) si dice *positivamente orientata*; se invece per incontrare **A**, **B**, **C** nell'ordine dato la circonferenza Γ va percorsa nel senso negativo (cioè, in senso orario), la terna (**A**, **B**, **C**) si dice *negativamente orientata*. È importante notare che questa convenzione non costituisce una vera e propria definizione, perché il significato delle espressioni "incontrare" e "percorrere in senso antiorario" non è stato precisato rigorosamente ma viene lasciato all'intuizione.

13.2 - Il "metodo delle coordinate".

La geometria è il ramo della matematica in cui (dai tempi di Euclide!) è stato più evidente il modo di procedere per definizioni e rigorose dimostrazioni. L'aspetto "creativo" delle dimostrazioni geometriche costituisce insieme il fascino e la difficoltà di questa materia: mentre per risolvere un'equazione di secondo grado (come supponiamo noto dalla scuola secondaria), per risolvere un sistema lineare (come vedremo nel cap. 14), per studiare una funzione (come vedremo nel cap. 23) esistono tecniche standard che lasciano poco spazio alla fantasia, chi affronta una dimostrazione di geometria affida all'intuizione la scelta se e come applicare i criteri di congruenza dei triangoli o le proprietà delle isometrie.

Un progetto per "tradurre" in linguaggio algebrico i problemi geometrici (e viceversa) è stato sviluppato dai matematici nel corso dei secoli. I primi passi in questa direzione si fanno risalire ad Apollonio di Perge (matematico e astronomo greco, 262-180 a. C.) ma i contributi più rilevanti sono stati probabilmente quelli di René Descartes (filosofo e matematico francese, 1596-1650, noto in Italia anche come "Cartesio") e Pierre de Fermat (matematico francese, 1601-1665). L'idea è (vagamente) quella di "etichettare" i punti del piano (enti geometrici) con coppie ordinate di numeri reali (enti algebrici) per poi lavorare (per via algebrica) su questi ultimi anziché (per via geometrica) sui primi. Si ottiene così un procedimento, noto come *metodo delle coordinate*, che consiste nell'esprimere un problema geometrico in termini algebrici, risolverlo (per via puramente algebrica) e interpretare geometricamente i risultati algebrici ottenuti.

In questo corso dobbiamo limitarci, per motivi di tempo, alla geometria piana; questo però sarà sufficiente per introdurre i concetti-chiave, e una generalizzazione allo spazio tridimensionale richiederebbe solo qualche nozione tecnico-tattica in più, senza comportare novità concettuali.

Abbiamo già visto (teorema 10.2.1) che, fissati su una retta $\mathcal{R}$ due punti **O** (*origine*) e **U** (*punto unità*), esiste una corrispondenza biunivoca **f** tra $\mathcal{R}$ e $\mathbb{R}$ tale che

> comunque presi $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2} \in \mathcal{R}$, il segmento $\overline{\mathbf{P_1P_2}}$ ha misura $|\mathbf{f}(\mathbf{P_1}) - \mathbf{f}(\mathbf{P_2})|$ rispetto all'unità di misura $\overline{\mathbf{OU}}$.

Mostreremo (in 13.3) come ciò conduce a una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}$ (l'insieme dei punti del piano) e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali) che risulta "compatibile" (nel senso che sarà precisato in 13.5) con la misura delle distanze del piano. Se tale corrispondenza biunivoca associa al punto $\mathbf{P}_0$ la coppia ordinata (x_0, y_0), diremo che x_0 e y_0 sono le *coordinate* di $\mathbf{P}_0$.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; possiamo associarle il luogo geometrico ([18]) $\mathcal{V}$ dei punti del piano le cui coordinate x, y verificano la condizione

$$\mathbf{f}(x, y) = 0.$$

Si dice che $\mathbf{f}(x, y) = 0$ è l'*equazione* ([19]) di $\mathcal{V}$, e anche che $\mathbf{f}(x, y) = 0$ *rappresenta* $\mathcal{V}$.

13.3 - Sistemi di riferimento nel piano.

Scegliamo nel piano due rette non parallele $\boldsymbol{r_x}$, $\boldsymbol{r_y}$; sia **O** il loro punto comune. Fissato su ciascuna retta un ulteriore punto ($\mathbf{U_x}$, $\mathbf{U_y}$ rispettivamente), restano univocamente determinate due corrispondenze biunivoche tra $\boldsymbol{r_x}$ e $\mathbb{R}$ e tra $\boldsymbol{r_y}$ e $\mathbb{R}$ verificanti le condizioni (i), (ii) e (iii) del teorema 10.2.1. Se $\mathbf{P}_x$ è un punto di $\boldsymbol{r_x}$, diremo *ascissa* di $\mathbf{P}_x$ il numero reale che corrisponde a $\mathbf{P}_x$; il suo valore assoluto è la distanza di $\mathbf{P}_x$ da **O** rispetto all'unità di misura $\overline{\mathbf{OU_x}}$. Se $\mathbf{P}_y$ è un punto di $\boldsymbol{r_y}$, diremo *ordinata* di $\mathbf{P}_y$ il numero reale che corrisponde a $\mathbf{P}_y$; il suo valore assoluto è la distanza di $\mathbf{P}_y$ da **O** rispetto all'unità di misura $\overline{\mathbf{OU_y}}$.

Sia **P** un punto del piano. Tracciamo per **P** le parallele a $\boldsymbol{r_y}$ e $\boldsymbol{r_x}$, e siano $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y$ le loro intersezioni con $\boldsymbol{r_x}$ e $\boldsymbol{r_y}$ rispettivamente. L'ascissa di $\mathbf{P}_x$ e l'ordinata di $\mathbf{P}_y$ si dicono rispettivamente *ascissa* e *ordinata* di **P** (e, nel loro complesso, *coordinate* di **P**). Scriveremo $\mathbf{P} \equiv (x, y)$ per indicare che i numeri reali x, y sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di **P**.

Si verifica che quella così definita è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\mathcal{P}$. Naturalmente, essa dipende in modo essenziale dalla scelta delle rette $\boldsymbol{r_x}$ ed $\boldsymbol{r_y}$ e dei punti $\mathbf{U_x}$, $\mathbf{U_y}$ su di esse.

---

[18] Un insieme di punti si dice spesso, per motivi storici, *luogo geometrico*. Con riferimento a punti del piano (o dello spazio) i termini "insieme" e "luogo geometrico" sono sinonimi.

[19] L'articolo determinativo lascerebbe supporre che ad ogni insieme resti associata una sola equazione. Ciò è del tutto falso, perché per ogni $\lambda \neq 0$ alle equazioni $\mathbf{f}(x, y) = 0$ e $\lambda\mathbf{f}(x, y) = 0$ resta associato lo stesso insieme di punti del piano.

Talvolta anzichè i punti $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{y}}$ si fissano su ciascuna delle due rette $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}$ una unità di misura (cioè un segmento) e un verso; ciò è del tutto equivalente, perchè i punti $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$, $\mathbf{U}_{\boldsymbol{y}}$ restano univocamente determinati dalle condizioni che $\overline{\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}}$, $\overline{\mathbf{OU}_{\boldsymbol{y}}}$ abbiano misura 1 (ciascuno rispetto alla unità di misura fissata sulla propria retta) e che sia $\mathbf{O} < \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$, $\mathbf{O} < \mathbf{U}_{\boldsymbol{y}}$. Diremo che tali scelte *individuano un sistema di riferimento cartesiano* nel piano. Il punto $\mathbf{O}$ si dice *origine* del SdR ([20]); le rette $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}$ si dicono *assi coordinati* (rispettivamente, *asse delle ascisse* e *asse delle ordinate*); i punti $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$ e $\mathbf{U}_{\boldsymbol{y}}$ si dicono *punti unità* degli assi coordinati; il SdR nel suo complesso verrà indicato con la notazione $\mathbf{O}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}$ (si noti peraltro che tale notazione non evidenzia né le unità di misura né i versi né i punti unità fissati sugli assi coordinati).

Sia $\mathbf{O}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}$ un SdR cartesiano nel piano. Le rette $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{y}}$ vengono spesso indicate con $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ rispettivamente; in tal caso, il SdR nel suo complesso si denota con $\mathbf{O}\boldsymbol{xy}$. La semiretta individuata dai punti dell'asse $\boldsymbol{x}$ [$\boldsymbol{y}$] aventi ascissa positiva [negativa] si dice *semiasse positivo* [*negativo*] *delle ascisse* [*delle ordinate*]. Gli assi coordinati dividono il piano in quattro settori. Quello individuato dal semiasse positivo delle ascisse e dal semiasse positivo delle ordinate (i cui punti hanno entrambe le coordinate ≥ 0) si dice *primo quadrante*; quello individuato dal semiasse negativo delle ascisse e dal semiasse positivo delle ordinate (i cui punti hanno ascissa ≤ 0 e ordinata ≥ 0) si dice *secondo quadrante*; quello individuato dal semiasse negativo delle ascisse e dal semiasse negativo delle ordinate (i cui punti hanno entrambe le coordinate ≤ 0) si dice *terzo quadrante*; quello individuato dal semiasse positivo delle ascisse e dal semiasse negativo delle ordinate (i cui punti hanno ascissa ≥ 0 e ordinata ≤ 0) si dice *quarto quadrante*.

Un SdR cartesiano nel quale gli assi coordinati sono fra loro ortogonali si dice *ortogonale*. Un SdR cartesiano nel quale i segmenti $\overline{\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}}$ e $\overline{\mathbf{OU}_{\boldsymbol{y}}}$ siano congruenti si dice *monometrico*. Un SdR cartesiano nel quale i punti $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$, $\mathbf{U}_{\boldsymbol{y}}$ (e quindi l'orientamento degli assi coordinati) siano stati scelti in modo che la terna ordinata di punti $(\mathbf{O}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{y}})$ sia orientata positivamente (cfr. l'osservazione 13.1.3) si dice *positivamente orientato.*

Nel seguito, salvo diverso avviso, ogni SdR cartesiano sarà supposto ortogonale, monometrico e positivamente orientato. Converremo inoltre che i punti unità fissati sugli assi coordinati abbiano distanza $\mathbf{1}$ *dall'origine.*

Nel resto di questa sezione supporremo fissato un SdR cartesiano $\mathbf{O}\boldsymbol{xy}$.

---

[20] abbrevieremo "sistema di riferimento" in "SdR".

Osservazione 13.3.1

L'origine ha coordinate $(0, 0)$.

Dimostrazione — Segue direttamente dal procedimento (descritto in questo paragrafo) per determinare le coordinate di un punto.

Osservazione 13.3.2

Sia $\mathcal{V}$ un insieme di punti del piano, e sia $\mathbf{p}(x, y) = 0$ un'equazione algebrica che rappresenta $\mathcal{V}$.

L'origine appartiene a $\mathcal{V}$ se e solo se nel polinomio $\mathbf{p}(x, y)$ il termine noto è zero (ossia, come si usa dire: nel polinomio $\mathbf{p}(x, y)$ "manca" il termine noto).

Dimostrazione — Infatti per l'osservazione 13.3.1 l'origine appartiene a $\mathcal{V}$ se e solo se $\mathbf{p}(0, 0) = 0$; ed è immediato che $\mathbf{p}(0, 0)$ è il termine noto di $\mathbf{p}(x, y)$.

Osservazione 13.3.3

Sia $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto del piano.

Il simmetrico di $\mathbf{P}_0$ rispetto all'asse delle ascisse [rispetto all'asse delle ordinate, rispetto all'origine] ha coordinate $(x_0, -y_0)$ $[(-x_0, y_0), (-x_0, -y_0)]$.

Dimostrazione — Si tratta di conseguenze dirette delle definizioni di simmetrico (rispetto a una retta, o rispetto a un punto) e di ascissa (e ordinata) di un punto.

13.4 - Cambiamento del sistema di riferimento.

Siano **O*xy*** e **O'*x'y'*** due sistemi di riferimento cartesiani (sui quali non facciamo alcuna ipotesi di ortogonalità, monometria, ecc.). Siano (x_0, y_0) le coordinate di **O** in **O'*x'y'***.

Si può dimostrare che esistono quattro numeri reali a, b, c e d tali che: per ogni punto **P** del piano, dette (x, y) le coordinate di **P** relative a **O*xy*** e (x', y') le coordinate di **P** relative a **O'*x'y'*** si ha

$$x' = ax + by + x_0$$

e

$$y' = cx + dy + y_0.$$

I numeri a, b, c e d si possono ricavare facilmente se si conoscono le coordinate in **O'*x'y'*** dei punti unità $\mathbf{U}_x$ e $\mathbf{U}_y$ di **O*xy***. Inoltre si può dimostrare che $ad - bc \neq 0$, e precisamente: $ad - bc > 0$ se entrambi i SdR sono positivamente orientati oppure nessuno dei due SdR è positivamente orientato (si dice in tal caso che i due SdR sono *concordemente orientati*); $ad - bc < 0$ se uno e uno soltanto dei due SdR è positivamente orientato.

Nel resto di questo capitolo (esclusa la sez. 13.13) supporremo fissato un SdR cartesiano Oxy.

13.5 - Distanza di due punti.

Dati due punti $\mathbf{P}_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $\mathbf{P}_2 \equiv (x_2, y_2)$, si dimostra che la loro distanza $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ si può esprimere in funzione delle loro coordinate mediante la formula

$$d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

13.6 - Coordinate del punto medio di un segmento.

Dati due punti $\mathbf{P}_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $\mathbf{P}_2 \equiv (x_2, y_2)$, sia $\mathbf{M} \equiv (x_m, y_m)$ il punto medio del segmento $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Vogliamo esprimere le coordinate di $\mathbf{M}$ in funzione di quelle di $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$.

Siano rispettivamente $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_m$ i punti in cui le parallele all'asse x passanti per $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{M}$ incontrano l'asse y, e siano rispettivamente $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_m$ i punti in cui le parallele all'asse y passanti per $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{M}$ incontrano l'asse x. Se il segmento $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ non è parallelo ad alcuno degli assi coordinati, i punti trovati sono tutti distinti, e per il teorema di Talete si hanno le relazioni

$$\frac{d(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_m)}{d(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_m)} = \frac{d(\mathbf{P}_1, \mathbf{M})}{d(\mathbf{P}_2, \mathbf{M})} \quad \text{e} \quad \frac{d(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_m)}{d(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_m)} = \frac{d(\mathbf{P}_1, \mathbf{M})}{d(\mathbf{P}_2, \mathbf{M})}.$$

Poiché $\mathbf{M}$ è il punto medio del segmento $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, si ha

$$d(\mathbf{P}_1, \mathbf{M}) = d(\mathbf{P}_2, \mathbf{M});$$

dunque dalle relazioni trovate si deduce che

$$d(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_m) = d(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_m) \quad \text{e} \quad d(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_m) = d(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_m),$$

ossia che $\mathbf{A}_m$ e $\mathbf{B}_m$ sono rispettivamente i punti medi dei segmenti $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$.

Siamo così ricondotti a considerare il caso in cui il segmento $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ è parallelo ad uno degli assi coordinati. Sia ad esempio $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ parallelo all'asse x: è facile verificare che l'ascissa di $\mathbf{M}$ è la media aritmetica tra l'ascissa di $\mathbf{P}_1$ e quella di $\mathbf{P}_2$, mentre l'ordinata di $\mathbf{M}$ è l'ordinata comune a $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ (ci si ricordi di considerare <u>tutte</u> le possibili posizioni dei punti $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ relativamente ai quattro quadranti!).

Si trova un risultato analogo quando $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ è parallelo all'asse y.

Dunque si ha in generale

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

13.7 - Forma generale dell'equazione cartesiana di una retta.

Teorema 13.7.1

Ogni retta del piano si può rappresentare con una equazione della forma

13.7.F1 $$a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c = 0$$

dove a, b, c sono numeri reali e a, b non sono entrambi nulli; e, viceversa, ogni equazione di tale forma (con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, b non entrambi nulli) rappresenta una retta.
Inoltre, la retta di equazione 13.7.F1 è parallela all'asse ***x*** sse $a = 0$, ed è parallela all'asse ***y*** sse $b = 0$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 13.7.2

I sottoinsiemi del piano che si possono rappresentare con un'equazione algebrica di primo grado sono tutte e sole le rette del piano.

Dimostrazione — Si tratta di una riformulazione della prima parte del teorema 13.7.1.

Teorema 13.7.3

Le equazioni
$$a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c = 0$$
$$a'\mathrm{x} + b'\mathrm{y} + c' = 0$$

(con $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, a, b non entrambi nulli, a', b' non entrambi nulli) rappresentano la stessa retta se e soltanto se esiste un numero reale λ tale che $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$.

Dimostrazione — È chiaro che se esiste un numero reale λ tale che $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$, le equazioni date sono equivalenti e quindi rappresentano la stessa retta.

Viceversa, supponiamo che le equazioni date rappresentino la stessa retta. Allora per ogni coppia ordinata di numeri reali (x_0, y_0) tale che $ax_0 + by_0 + c = 0$ deve essere anche $a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$. Per ipotesi, a e b non sono entrambi nulli; sia ad esempio $a \neq 0$. Per ogni numero reale y_0, posto $x_0 := -\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}$,

si ha $ax_0 + by_0 + c = 0$ e quindi anche $a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$ ossia
$$-\frac{b}{a}a'y_0 - \frac{c}{a}a' + b'y_0 + c' = 0.$$

Dunque quest'ultima uguaglianza, che si può scrivere anche

13.7.F2 $$(ab' - a'b)y_0 = a'c - ac',$$

deve essere verificata per ogni numero reale y_0. Ciò comporta che sia $ab' = a'b$ e $ac' = a'c$ [21]; posto $\lambda := \frac{a'}{a}$, si ha $\mathrm{a}' = \lambda\mathrm{a}$, $\mathrm{b}' = \lambda\mathrm{b}$, $\mathrm{c}' = \lambda\mathrm{c}$ come si voleva.

---

[21] Infatti, se fosse $ab' \neq a'b$, la 13.2.F2 sarebbe verificata solo per $y_0 = \frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$; se fosse $ab' = a'b$ ma $ac' \neq a'c$, la 13.2.F2 non sarebbe verificata per alcun valore di y_0.

13.8 - Equazione della retta per due punti.

Teorema 13.8.1

Siano $\mathbf{P_1} \equiv (x_1, y_1)$ e $\mathbf{P}_2 \equiv (x_2, y_2)$ due punti distinti del piano. La retta $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ ha equazione

13.8.F1 $$(y_2 - y_1)(\mathrm{x} - x_1) - (x_2 - x_1)(\mathrm{y} - y_1) = 0.$$

Tale equazione, quando $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, si può anche scrivere

$$\frac{\mathrm{x} - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\mathrm{y} - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Dimostrazione — Per il teorema 13.7.1, l'equazione 13.8.F1 rappresenta una retta. È immediato verificare che tale retta passa sia per $\mathbf{P}_1$ che per $\mathbf{P}_2$; si tratta quindi della retta cercata.

Esercizi

13.8.2 Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $\mathbf{A} \equiv (1, 2)$ e $\mathbf{B} \equiv (3, -1)$.

13.8.3 Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $\mathbf{A} \equiv (1, 2)$ e $\mathbf{B} \equiv (3, 2)$.

13.8.4 Determinare l'equazione cartesiana della retta per $\mathbf{A} \equiv (1, 2)$ e $\mathbf{B} \equiv (1, -1)$.

13.9 - Forma esplicita dell'equazione di una retta.

Sia ***r*** una retta (di equazione $a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c = 0$) non parallela all'asse ***y***. Allora $b \neq 0$ per il teorema 13.7.1; dunque ***r*** ha anche equazione

$$\tfrac{1}{b}(a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c = 0),$$

ossia

$$\mathrm{y} = -\frac{a}{b}\mathrm{x} - \frac{c}{b}$$

cioè, posto $p = -\dfrac{a}{b}$ e $q = -\dfrac{c}{b}$,

$$\mathrm{y} = p\mathrm{x} + q.$$

Dunque ogni retta non parallela all'asse ***y*** ha equazione nella forma ("*esplicita*")

$$\mathrm{y} = p\mathrm{x} + q \qquad \text{con } p, q \in \mathbb{R}.$$

Ed è chiaro che ad ogni retta non parallela all'asse ***y*** resta associata una sola equazione in forma esplicita: infatti, se le equazioni $\mathrm{y} = p\mathrm{x} + q$, $\mathrm{y} = p'\mathrm{x} + q'$ rappresentano la stessa retta, per il teorema 13.7.3 esiste un numero reale λ tale che $p' = \lambda p$, $-1 = \lambda(-1)$, $q' = \lambda q$, da cui si ricava subito che deve essere $\lambda = 1$ e quindi $p' = p$, $q' = q$.

Analogamente si vede che ogni retta non parallela all'asse ***x*** ha una e una sola equazione nella forma $\mathrm{x} = m\mathrm{y} + n$ con $m, n \in \mathbb{R}$.

Le rette parallele all'asse ***y*** hanno equazione nella forma

$$\mathrm{x} = d \qquad \text{con } d \in \mathbb{R}.$$

Esercizi

13.9.1 Determinare l'equazione esplicita della retta $3x - 2y + 2 = 0$.

13.9.2 Determinare l'equazione esplicita della retta per **P** $\equiv (-2, 3)$ e **Q** $\equiv (1, 3)$.

13.9.3 Determinare l'equazione esplicita della retta per **P** $\equiv (-\pi, \pi)$ e **Q** $\equiv (7, -7)$.

13.10 - Equazione della generica retta passante per un punto assegnato.

Sia $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto del piano. La generica retta passante per $\mathbf{P}_0$ ha equazione

13.10.F1 $$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

È bene aver chiaro che con la 13.10.F1 si scrivono, al variare di a e b in $\mathbb{R}$, tutte le equazioni di tutte le rette passanti per $\mathbf{P}_0$. Spesso conviene considerare solo le equazioni esplicite delle rette cercate; supposto allora $b \neq 0$ e posto come in 13.9 $p = -\frac{a}{b}$, la 13.10.F1 diventa

13.10.F2 $$y - y_0 = p(x - x_0).$$

Con la 13.10.F2 si scrivono, al variare di p in $\mathbb{R}$, le equazioni esplicite di tutte le rette passanti per $\mathbf{P}_0$ non parallele all'asse ***y***.

13.11 - Condizioni di parallelismo e ortogonalità fra rette.

Teorema 13.11.1

Le rette ***r***, ***s*** di equazioni rispettivamente $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele se e solo se $ab' - a'b = 0$; sono ortogonali se e solo se $aa' + bb' = 0$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 13.11.2

Le rette ***r***, ***s*** di equazioni esplicite rispettivamente

$$y = p_1 x + q_1$$
$$y = p_2 x + q_2$$

sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare (ossia, $p_1 = p_2$); sono ortogonali se e solo se il coefficiente angolare dell'una è l'opposto del reciproco del coefficiente angolare dell'altra (ossia, $p_1 = -\frac{1}{p_2}$).

Dimostrazione — Per il teorema 13.11.1, ***r*** e ***s*** sono parallele se e solo se

$$0 = p_1(-1) - p_2(-1) = -p_1 + p_2$$

ossia se e solo se $p_1 = p_2$. Ancora per il teorema 13.11.1, ***r*** e ***s*** sono ortogonali se e solo se

$$p_1 p_2 + (-1)(-1) = 0$$

ossia se e solo se $p_1 p_2 = -1$.

La relazione che lega il coefficiente angolare di una retta alla sua direzione è precisata dal seguente

Teorema 13.11.3

Sia ***r*** una retta non parallela all'asse ***y***. Il coefficiente angolare di ***r*** è la tangente trigonometrica dell'angolo formato dall'asse ***x*** e dalla retta ***r***.

Dimostrazione — Sia p il coefficiente angolare di ***r***. La retta ***r'*** parallela a ***r*** passante per l'origine ha equazione

$$y = px$$

e gli angoli $\widehat{xr}$, $\widehat{xr'}$ sono congruenti.

È poi noto che la tangente trigonometrica dell'angolo $\widehat{xr'}$ è l'ordinata del punto in cui ***r'*** incontra la retta di equazione $x = 1$ (tale retta è infatti la tangente alla circonferenza goniometrica che attraversa il primo e quarto quadrante); l'asserto è così provato.

Esercizio 13.11.4

Determinare la retta passante per **P** $\equiv (1, 5)$ e parallela alla retta di equazione $2x - y = 0$.

Esercizio 13.11.5

Determinare la retta passante per **P** $\equiv (2, -3)$ e parallela all'asse delle ***x***.

Esercizio 13.11.6

I punti $\mathbf{A} \equiv (-3, 1)$ e $\mathbf{B} \equiv (2, 2)$ sono vertici di un parallelogramma in cui $\mathbf{Q} \equiv (-3, 0)$ è l'intersezione delle diagonali. Trovare gli altri vertici e le rette dei lati.

Esercizio 13.11.7

Le rette di equazioni $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ sono due lati di un rettangolo di cui la retta di equazione $7x - 2y - 15 = 0$ è una delle due diagonali.

Trovare le coordinate dei vertici del rettangolo e l'equazione dell'altra diagonale.

13.12 - Distanza di un punto da una retta.

Siano $\mathbf{P}$ un punto e $\boldsymbol{r}$ una retta del piano. Detto $\mathbf{R}_0$ il piede della perpendicolare condotta da $\mathbf{P}$ a $\boldsymbol{r}$, per ogni altro punto $\mathbf{R}$ di $\boldsymbol{r}$ si ha

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{R}) > d(\mathbf{P}, \mathbf{R}_0)$$

perché il triangolo $\mathbf{PR}_0\mathbf{R}$ è (per costruzione di $\mathbf{R}_0$) rettangolo in $\mathbf{R}_0$, e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è sempre maggiore di ciascun cateto.

Dunque $d(\mathbf{P}, \mathbf{R}_0)$ è la minima distanza tra $\mathbf{P}$ e i punti di $\boldsymbol{r}$; essa si dice *distanza* tra $\mathbf{P}$ e $\boldsymbol{r}$ e si indica anche con $d(\mathbf{P}, \boldsymbol{r})$.

Esempio 13.12.1

Determiniamo la distanza di $\mathbf{P} \equiv (5, -2)$ dalla retta $\boldsymbol{r} : x - 2y + 1 = 0$.

La generica retta ortogonale a $\boldsymbol{r}$ ha equazione $2x + y + c = 0$, e passa per $\mathbf{P}$ sse $2 \cdot 5 + (-2) + c = 0$, ossia sse $c = -8$; la perpendicolare condotta da $\mathbf{P}$ a $\boldsymbol{r}$ ha dunque equazione $2x + y - 8 = 0$. Il punto $\mathbf{Q}$ in cui tale retta incontra $\boldsymbol{r}$ ha per coordinate la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} .$$

Si trova che $\mathbf{Q}$ ha coordinate $(3, 2)$; dunque,

$$d(\mathbf{P}, \boldsymbol{r}) = d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sqrt{(5-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,.$$

Applicando il procedimento dell'es. 13.12.1 con $\mathbf{P} \equiv (x_0, y_0)$ e $\boldsymbol{r} : a\mathrm{x} + b\mathrm{y} + c = 0$ generici, si trova (con calcoli un po' lunghi) che

13.12.F1
$$d(\mathbf{P}, \boldsymbol{r}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Esempio 13.12.2

Applicando la formula 13.12.F1 ai dati dell'esempio 13.12.1, si trova subito che

$$d(\mathbf{P}, \boldsymbol{r}) = \frac{|5 - 2 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

13.13 - Il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti dati.

Siamo ora in grado di vedere un (semplicissimo) esempio di applicazione del metodo delle coordinate.

Siano dati due punti **A**, **B** del piano; vogliamo determinare il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da **A** e **B**.

A tale scopo: costruiamo un SdR cartesiano ortogonale, monometrico, positivamente orientato e "ben disposto" rispetto ad **A** e **B** per semplificare i calcoli (dalla geometria passiamo all'algebra); determiniamo l'equazione cartesiana del luogo cercato (eseguiamo dei calcoli in ambito puramente algebrico); deduciamo dalle caratteristiche di tale equazione le informazioni che ci interessano (dal contesto algebrico ritorniamo alla geometria).

Questo percorso, qui particolarmente semplice, è quello tipico del metodo delle coordinate.

Sia **P** un punto del piano.

P appartiene al luogo geometrico considerato se e solo se verifica la

13.13.F1
$$d(\mathbf{P}, \mathbf{A}) = d(\mathbf{P}, \mathbf{B}).$$

Costruiamo il nostro SdR cartesiano scegliendo

– l'asse delle ascisse coincidente con la retta **AB**;

– l'origine coincidente con **A**;

– l'asse delle ordinate ortogonale all'asse delle ascisse;

– il punto unità sull'asse delle ascisse coincidente con **B** e quello sull'asse delle ordinate in modo che il SdR risulti monometrico e positivamente orientato. Con questa decisione abbiamo implicitamente assegnato il segmento **AB** come unità di misura per le distanze: ciò non crea problemi, perché la 13.13.F1 non dipende dall'unità di misura fissata.

Sarà dunque $\mathbf{A} \equiv (0, 0)$, $\mathbf{B} \equiv (1, 0)$.

Elevando al quadrato ambo i membri della 13.13.F1 si ottiene la

13.13.F2 $$(d(\mathbf{P}, \mathbf{A}))^2 = (d(\mathbf{P}, \mathbf{B}))^2$$

che è equivalente alla 13.13.F1 perché la

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{A}) = -d(\mathbf{P}, \mathbf{B})$$

non ha soluzioni: infatti le distanze sono per definizione numeri positivi.

Siano (x, y) le coordinate di **P**. Esprimendo la 13.13.F2 mediante le coordinate di **P**, **A** e **B**, si ottiene l'equazione

$$x^2 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

ossia, semplificando,

$$x = \frac{1}{2}$$

che rappresenta la retta parallela all'asse delle ordinate passante per il punto medio del segmento **AB**.

Dunque il luogo geometrico considerato è la retta passante per il punto medio del segmento **AB** e ortogonale ad esso: il cosiddetto *asse* del segmento **AB**.

14.- SISTEMI LINEARI

14.1 - Richiami sulle equazioni algebriche.

Sia $\mathbf{p}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$ un polinomio a coefficienti reali nelle indeterminate $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$. Se ci si chiede per quali numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si abbia

$$\mathbf{p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0 \text{ (22)}$$

si dice che si considera l'*equazione algebrica in* $\mathbb{R}$

$$\boxed{14.1.\mathrm{F1}} \qquad \mathbf{p}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) = 0$$

associata al polinomio dato; $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ si dicono le *incognite* di tale equazione.

Si dice *soluzione* dell'equazione algebrica $\boxed{14.1.\mathrm{F1}}$ ogni n-pla ordinata $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ di numeri reali tale che $\mathbf{p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$. L'equazione data si dice *impossibile* se non ha soluzioni (es.: $n = 2$, $\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 + 1 = 0$), *determinata* se ha un numero finito di soluzioni (es.: $n = 2$, $\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 = 0$; $n = 1$, $\mathrm{x}_1^2 - 4 = 0$), *indeterminata* se ha infinite soluzioni (es.: $n = 2$, $\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 - 1 = 0$), *identicamente soddisfatta* se <u>ogni</u> n-pla ordinata di numeri reali è sua soluzione (es.: $n = 2$, $(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)^2 - \mathrm{x}_1^2 - 2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_2^2 = 0$) (23).

Due equazioni algebriche nelle stesse incognite si dicono *equivalenti* se sono entrambe impossibili oppure hanno le stesse soluzioni.

Un'equazione algebrica nelle incognite $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ può essere assegnata anche nella forma

$$\boxed{14.1.\mathrm{F2}} \qquad \mathbf{p}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) = \mathbf{q}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$$

dove $\mathbf{p}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$ e $\mathbf{q}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$ sono polinomi a coefficienti reali nelle indeterminate $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$; ci si chiede in questo caso per quali numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si abbia $\mathbf{p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. È chiaro che la $\boxed{14.1.\mathrm{F2}}$ è equivalente all'equazione algebrica associata al polinomio $\mathbf{p}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) - \mathbf{q}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$.

Le espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno " $=$ " nelle $\boxed{14.1.\mathrm{F1}}$ e $\boxed{14.1.\mathrm{F2}}$ si dicono rispettivamente *primo membro* e *secondo membro* dell'equazione. Sommando ad ambo i membri di una data equazione algebrica uno stesso numero reale, oppure moltiplicando ambo i membri per uno stesso numero reale (purché, in quest'ultimo caso, diverso da zero) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

---

[22] Con $\mathbf{p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ si indica il numero reale ottenuto sostituendo nell'ordine $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ ed eseguendo le operazioni indicate dalla forma del polinomio $\mathbf{p}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$.

[23] Si noti che un'equazione identicamente soddisfatta è indeterminata, ma non è vero in generale il viceversa!

14.2 - Generalità sui sistemi lineari.

Siano m, n numeri interi positivi. Un insieme di m equazioni algebriche in n incognite fissate $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$ si dice un *sistema* di m equazioni algebriche nelle n incognite $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$. Si dice *soluzione* di un sistema di equazioni algebriche nelle n incognite $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$ ogni n-pla ordinata di numeri reali che sia soluzione di tutte le equazioni del sistema.

Un sistema di equazioni algebriche si dice *impossibile* se non ha soluzioni, *risolubile* se ha soluzioni; nel primo caso si dice anche che le equazioni del sistema dato sono *incompatibili*, nel secondo che sono *compatibili*.

Due sistemi di equazioni algebriche nelle stesse incognite si dicono *equivalenti* se sono entrambi impossibili oppure hanno le stesse soluzioni.

Si dice che un sistema di equazioni algebriche nelle incognite $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$ *ammette* $\mathrm{x}_{i_1}, \mathrm{x}_{i_2}, \dots, \mathrm{x}_{i_k}$ *come incognite libere* se per ogni $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$ esiste almeno una soluzione del sistema per la quale è

$$\mathrm{x}_{i_1} = \alpha_{i_1}, \quad \mathrm{x}_{i_2} = \alpha_{i_2}, \quad \dots, \quad \mathrm{x}_{i_k} = \alpha_{i_k}$$

(ovvero se per ogni assegnazione di valori arbitrari a $\mathrm{x}_{i_1}, \mathrm{x}_{i_2}, \dots, \mathrm{x}_{i_k}$ esiste almeno una soluzione del sistema dato in cui $\mathrm{x}_{i_1}, \mathrm{x}_{i_2}, \dots, \mathrm{x}_{i_k}$ assumono tali valori).

Se un sistema di equazioni algebriche ammette incognite libere, si cerca quando è possibile di essere più precisi.

Si dice che un sistema di equazioni algebriche nelle incognite $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$ *ha* (*esattamente*) k *incognite libere* $\mathrm{x}_{i_1}, \mathrm{x}_{i_2}, \dots, \mathrm{x}_{i_k}$ se per ogni $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$ esiste esattamente una soluzione del sistema per la quale è

$$\mathrm{x}_{i_1} = \alpha_{i_1}, \quad \mathrm{x}_{i_2} = \alpha_{i_2}, \quad \dots, \quad \mathrm{x}_{i_k} = \alpha_{i_k}$$

(ovvero se per ogni assegnazione di valori arbitrari a $\mathrm{x}_{i_1}, \mathrm{x}_{i_2}, \dots, \mathrm{x}_{i_k}$ esiste esattamente una soluzione del sistema in cui $\mathrm{x}_{i_1}, \mathrm{x}_{i_2}, \dots, \mathrm{x}_{i_k}$ assumono tali valori). In questo caso si dice anche che le soluzioni del sistema *dipendono da k parametri indipendenti*.

Un sistema di equazioni algebriche tutte di primo grado si dice un *sistema lineare*. Ogni sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$ si può scrivere nella forma

14.3.F1
$$\begin{cases} a_{1,1}\mathrm{x}_1 + a_{1,2}\mathrm{x}_2 + \dots + a_{1,n}\mathrm{x}_n = b_1 \\ a_{2,1}\mathrm{x}_1 + a_{2,2}\mathrm{x}_2 + \dots + a_{2,n}\mathrm{x}_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}\mathrm{x}_1 + a_{m,2}\mathrm{x}_2 + \dots + a_{m,n}\mathrm{x}_n = b_m \end{cases}$$

dove gli $m \cdot n$ numeri reali $a_{i,j}$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ si dicono i *coefficienti del sistema* e gli m numeri reali $b_1, b_2, \dots, b_m$ si dicono i *termini noti* del sistema.

Un sistema lineare si dice *omogeneo* se i suoi termini noti sono tutti uguali a zero.

Teorema 14.2.1

Sia n un numero intero positivo. Ogni sistema lineare omogeneo in n incognite ammette la soluzione $(0, 0, \dots, 0)$, detta *soluzione banale*.

Dimostrazione — La generica (i-esima) equazione di un sistema lineare omogeneo ha la forma

$$a_{i,1}\mathrm{x}_1 + a_{i,2}\mathrm{x}_2 + \dots + a_{i,n}\mathrm{x}_n = 0.$$

Se al primo membro poniamo $\mathrm{x}_j := 0$ per $j := 1, 2, \dots, n$, il primo membro diventa

$$a_{i,1}0 + a_{i,2}0 + \dots + a_{i,n}0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

e dunque $(0, 0, \dots, 0)$ è soluzione del sistema, come si doveva dimostrare.

14.3 - Matrici associate a un sistema lineare.

Un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n$ scritto nella forma

14.3.F1
$$\begin{cases} a_{1,1}\mathrm{x}_1 + a_{1,2}\mathrm{x}_2 + \dots + a_{1,n}\mathrm{x}_n = b_1 \\ a_{2,1}\mathrm{x}_1 + a_{2,2}\mathrm{x}_2 + \dots + a_{2,n}\mathrm{x}_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}\mathrm{x}_1 + a_{m,2}\mathrm{x}_2 + \dots + a_{m,n}\mathrm{x}_n = b_m \end{cases}$$

risulta univocamente determinato dai coefficienti $a_{i,j}$ e dai termini noti b_i. La matrice $\mathrm{A} := (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice *matrice incompleta del sistema*; la matrice di m righe e una colonna

$$\mathrm{B} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(identificabile con un elemento di $\mathbb{R}^m$) è detta *colonna dei termini noti*; la matrice di m righe e $n+1$ colonne ottenuta aggiungendo (come $(n+1)$-sima colonna) alla matrice incompleta la colonna dei termini noti è detta *matrice completa del sistema* e contiene, come si è osservato, tutte le informazioni necessarie per individuare il sistema stesso (e quindi, come vedremo, per stabilire se esso è risolubile oppure no e per determinarne tutte le eventuali soluzioni). Ogni matrice di m righe e $n+1$ colonne è la matrice completa di un (e un solo) sistema lineare di m equazioni in n incognite, che si dice *sistema lineare associato* alla matrice data.

La matrice completa del sistema lineare 14.3.F1 si indica talvolta con $(\mathrm{A};\mathrm{B})$.

14.4 - Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema.

Si dicono *operazioni elementari* sulle equazioni di un sistema le seguenti:

S.1 scambio di due equazioni;

S.2 sostituzione di una equazione con quella ottenuta moltiplicandone ambo i membri per un numero reale diverso da zero;

S.3 sostituzione di una equazione con quella ottenuta sommandovi (membro a membro) un'altra equazione del sistema moltiplicata membro a membro per un numero reale qualsiasi (eventualmente anche per zero).

Due sistemi che si ottengono uno dall'altro mediante operazioni elementari sulle equazioni sono equivalenti (nel senso definito in 14.2). Inoltre, mediante operazioni elementari sulle equazioni ogni sistema lineare può essere trasformato in un sistema di forma assai particolare per il quale risulta molto semplice determinare se esistono soluzioni e calcolarle.

Fissiamo una notazione per indicare brevemente le operazioni elementari ora introdotte.

Se scambiamo la i-sima equazione del sistema con la j-sima, scriveremo

$$\mathrm{E}_i \leftrightarrow \mathrm{E}_j .$$

Se sostituiamo alla i-sima equazione del sistema quella ottenuta moltiplicandone ambo i membri per il numero reale λ (diverso da zero), scriveremo

$$\mathrm{E}_i := \lambda \mathrm{E}_i .$$

Se sostituiamo alla i-sima equazione del sistema quella ottenuta sommandovi membro a membro la j-sima equazione moltiplicata per il numero reale λ, scriveremo

$$\mathrm{E}_i := \mathrm{E}_i + \lambda \mathrm{E}_j .$$

Facciamo un semplice esempio. Si consideri il sistema

14.4.F1
$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} + 2\,\mathrm{z} = 1 \\ \mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 3\,\mathrm{z} = -1 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{z} = 6 \end{cases}$$

e si effettuino nell'ordine le seguenti operazioni elementari sulle sue equazioni:

- $\mathrm{E}_2 := \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1$;
- $\mathrm{E}_3 := \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1$;
- $\mathrm{E}_3 := \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_2$.

Si ottiene così il sistema

$\boxed{14.4.F2}$ $$\begin{cases} x + y + 2\,z = 1 \\ y + z = \ -2 \\ \ -y = 3 \end{cases}$$

che risulta particolarmente facile da risolvere, perché solo nella prima equazione compaiono tutte le incognite: nella seconda equazione compaiono solo la y e la z, e nella terza solo la y.

Si può procedere agevolmente “per sostituzione”: “sostituendo” alla y nella seconda equazione il valore -3 ricavato dalla terza si ottiene la

$$-3 + z = \ -2$$

dalla quale si ha $z = 1$; “sostituendo” ancora nella prima equazione alla y il valore -3 e alla z il valore 1, si ottiene la $$x - 3 + 2 = 1$$

dalla quale si ricava infine $x = 2$.

Oppure si può proseguire mediante operazioni elementari sulle equazioni, ad esempio come segue:

- $E_3 := \ -E_3$;
- $E_2 := E_2 - E_3$;
- $E_1 := E_1 - E_3$;
- $E_1 := E_1 - 2\,E_2$.

Si ottiene così il sistema

$\boxed{14.4.F3}$ $$\begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \\ y = \ -3 \end{cases}$$

che ammette evidentemente la sola soluzione $(2, \ -3, 1)$.

C’è da osservare che il procedimento utilizzato per risolvere il sistema $\boxed{14.4.F1}$ risulta pesante (ad ogni passaggio si devono trascrivere le equazioni come via via modificate) e, soprattutto, oscuro: come si devono scegliere, e in quale ordine, le operazioni elementari da eseguire? Per ovviare a questi problemi si usa operare sulla matrice completa del sistema anziché sul sistema in quanto tale: ad ogni passaggio si trascrivono così solo gli elementi essenziali (i coefficienti e i termini noti) e, soprattutto, risulta facile descrivere l’algoritmo risolutivo.

14.5 - Operazioni elementari sulle righe di una matrice.

Si dicono *operazioni elementari* sulle righe di una matrice le seguenti:

M.1 scambio di due righe;

M.2 sostituzione di una riga con quella ottenuta moltiplicandola per un numero reale diverso da zero;

M.3 sostituzione di una riga con quella ottenuta sommandovi un'altra riga della matrice moltiplicata per un numero reale (eventualmente anche per zero).

Tali operazioni si indicano brevemente con notazione analoga a quella introdotta in 14.4 per le operazioni elementari sulle equazioni di un sistema lineare.

Se scambiamo la riga R_i con la riga R_j, scriveremo

$$\mathrm{R}_i \leftrightarrow \mathrm{R}_j .$$

Se sostituiamo alla riga R_i il suo prodotto per il numero reale λ (diverso da zero), scriveremo

$$\mathrm{R}_i := \lambda \mathrm{R}_i .$$

Se sostituiamo alla riga R_i la sua somma con la riga R_j moltiplicata per il numero reale λ, scriveremo

$$\mathrm{R}_i := \mathrm{R}_i + \lambda \mathrm{R}_j .$$

Sia $\mathcal{M}$ l'insieme delle matrici a elementi in $\mathbb{R}$. Se A, B $\in \mathcal{M}$, poniamo A $\sim$ B se B si ottiene da A mediante un numero finito di operazioni elementari sulle righe.

È facile verificare che la $\sim$ è una relazione di equivalenza in $\mathcal{M}$. Due matrici che siano in relazione secondo la $\sim$ si dicono semplicemente *equivalenti*.

Teorema 14.5.1

A matrici equivalenti sono associati sistemi lineari equivalenti.

Dimostrazione – Basta osservare che le operazioni elementari sulle righe di una matrice corrispondono alle operazioni elementari sulle equazioni del sistema lineare ad essa associato (e dunque trasformano tale sistema in un sistema equivalente).

Individuiamo ora a quali matrici sono associati sistemi lineari dalla forma "buona" (cioè sistemi lineari agevolmente risolubili per sostituzione come si è visto per il sistema 14.4.F2).

Sia A $= (a_{i,j})$ una matrice $m \times n$. L'elemento $a_{h,k}$ si dice un *pivot* (per A) se

$$a_{h,k} \neq 0$$

e
$$a_{i,k} = 0 \qquad \forall\, i > h$$

ossia se $a_{h,k}$ è diverso da zero e "sotto di lui" tutti gli elementi sono uguali a zero.

Una matrice si dice *ridotta* (*per righe*) se in ogni sua riga non nulla c'è un pivot.

Esempio 14.5.2

Le seguenti matrici sono ridotte per righe:

$$(a_{i,j}) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(i pivot sono: $a_{1,2}$; $a_{2,3}$; $a_{3,1}$; $a_{4,4}$ (oppure $a_{4,5}$))

$$(b_{i,j}) := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(i pivot sono: $b_{1,1}$; $b_{2,3}$; $b_{3,4}$; $b_{5,2}$ (oppure $b_{5,5}$); si noti che non è richiesto un pivot nella quarta riga, perché la quarta riga è nulla).

Le seguenti matrici <u>non</u> sono ridotte per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(perché nella terza riga non c'è pivot)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(perché nella seconda riga non c'è pivot).

$\boxed{\text{Teorema 14.5.3}}$

Sia $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ una matrice $m \times n$, e sia $a_{h,k}$ un elemento non nullo di A.
Mediante operazioni elementari del tipo $\boxed{\text{M.3}}$ sulle righe $a_{h+1,*}$, $a_{h+2,*}$, $\ldots$, $a_{m,*}$, A può essere trasformata in una matrice per la quale $a_{h,k}$ è un pivot.

Dimostrazione – Per ogni numero intero r tale che $h < r \leq m$ determiniamo una operazione elementare della forma

$$(\bigstar) \qquad a_{r,*} := a_{r,*} + x \cdot a_{h,*}$$

(con x opportuno numero reale) in seguito alla quale risulti $a_{r,k} = 0$.

Considerando la k-sima componente di ciascuna n-pla ordinata di numeri reali che compare nella $(\bigstar)$, si trova che deve essere $0 = a_{r,k} + x \cdot a_{h,k}$

e quindi

$$x := -\tfrac{a_{r,k}}{a_{h,k}}$$

(ricordando che per ipotesi $a_{h,k} \neq 0$).

Le $m-h$ operazioni elementari

$$a_{r,*} := a_{r,*} - \tfrac{a_{r,k}}{a_{h,k}} \cdot a_{h,*} \qquad (r := h+1, h+2, \ldots, m)$$

trasformano pertanto la matrice A in una matrice per la quale $a_{h,k}$ è un pivot.

$\boxed{\text{Teorema 14.5.4}}$

Ogni matrice di n colonne è equivalente a una matrice $\bar{\mathrm{A}}$ tale che:

– $\bar{\mathrm{A}}$ è ridotta

e inoltre

– la matrice formata dalle prime $n-1$ colonne di $\bar{\mathrm{A}}$ è ridotta.

Dimostrazione – Diamo una dimostrazione costruttiva del teorema: cioè, data una matrice $m \times n$ $\mathrm{A} = (a_{i,j})$, mostriamo come trasformarla nella matrice $\bar{\mathrm{A}}$ dell'enunciato mediante operazioni elementari sulle righe.

Controlliamo in primo luogo se nella prima riga di A c'è un elemento non nullo a_{1,k_1} con $k_1 < n$ (cioè che non appartenga all'ultima colonna).
Se un tale elemento non c'è, scambiamo la prima riga di A con un'altra (operazione elementare sulle righe del tipo $\boxed{\text{M.1}}$) nella quale un tale elemento ci sia. Se questo non è possibile, tutti gli elementi delle prime $n-1$ colonne di A sono nulli; in tale patologica eventualità può darsi che addirittura tutti gli elementi di A siano nulli (ma allora A è già ridotta) oppure ci sono elementi non nulli soltanto nell'ultima colonna: in quest'ultimo caso, assicuriamoci che $a_{1,n}$ sia non nullo (eventualmente scambiando la prima riga di A con una riga successiva) e poi (usando il teorema 14.5.3) traformiamo A in una matrice $\bar{\mathrm{A}}$ nella quale $a_{1,n}$ sia un pivot: in questa matrice $\bar{\mathrm{A}}$, $a_{1,n}$ è l'unico elemento non nullo ed è chiaro che $\bar{\mathrm{A}}$ verifica le condizioni promesse nell'enunciato.

Se (come di solito accade, eventualmente dopo uno scambio di righe) nella prima riga di A c'è un elemento non nullo a_{1,k_1} con $k_1 < n$, usando il teorema 14.5.3 traformiamo A in una matrice $\mathrm{A}_1 = (\overline{a}_{i,j})$ nella quale a_{1,k_1} sia un pivot.

Adesso controlliamo se nella seconda riga di A_1 c'è un elemento non nullo $\overline{a}_{2,k_2}$ con $k_2 < n$ (cioè che non appartenga all'ultima colonna).

Se un tale elemento non c'è, scambiamo la seconda riga di A_1 con un'altra successiva (operazione elementare sulle righe del tipo $\boxed{\text{M.1}}$) nella quale un tale elemento ci sia. Se questo non è possibile, tutti gli elementi delle prime $n-1$ colonne di A_1 nelle righe successive alla prima sono nulli; in tale patologica eventualità può darsi che addirittura tutti gli elementi di A_1 nelle righe successive alla prima siano nulli (ma allora A_1 è già ridotta) oppure nelle righe successive alla prima ci sono elementi non nulli soltanto nell'ultima colonna: in quest'ultimo caso, assicuriamoci che $\overline{a}_{2,n}$ sia non nullo (eventualmente scambiando la seconda riga di A_1 con una riga successiva) e poi (usando il teorema 14.5.3) traformiamo A_1 in una matrice $\overline{\mathrm{A}}$ nella quale $\overline{a}_{2,n}$ sia un pivot: in questa matrice $\overline{\mathrm{A}}$, $a_{2,n}$ è l'unico elemento non nullo nelle righe successive alla prima ed è chiaro che $\overline{\mathrm{A}}$ verifica le condizioni promesse nell'enunciato.

Se invece (eventualmente dopo uno scambio di righe) nella seconda riga di A_1 c'è un elemento non nullo $\overline{a}_{2,k_2}$ con $k_2 < n$, usando il teorema 14.5.3 traformiamo A_1 in una matrice A_2 nella quale $\overline{a}_{2,k_2}$ sia un pivot. Notiamo esplicitamente che qualunque operazione elementare che coinvolga la seconda riga di A_1 e le successive non muta la condizione di pivot già acquisita dall'elemento a_{1,k_1}.

Procediamo così operando sulla terza, quarta, ..., m – sima riga delle matrici via via ottenute, ciascuna delle quali per costruzione risulta equivalente alla matrice data A. L'ultima matrice a cui si perviene verifica le condizioni promesse nell'enunciato.

14.6 - Teorema di Rouché-Capelli.

Un sistema lineare si dice *ridotto* se la sua matrice incompleta e la sua matrice completa sono <u>entrambe</u> ridotte.

$\boxed{\text{Teorema 14.6.1}}$

Ogni sistema lineare è equivalente a un sistema lineare ridotto.

Dimostrazione – Si tratta di una riformulazione del teorema 14.5.4..

Teorema 14.6.2 (Rouché – Capelli)

Un sistema lineare ridotto di m equazioni in n incognite ha soluzione se e soltanto se la sua matrice incompleta e la sua matrice completa hanno lo stesso numero r di righe non nulle; e, in tal caso, esistono esattamente $n - r$ incognite libere.

Dimostrazione — Per ipotesi, il sistema lineare è della forma

$$\begin{cases} a_{1,1}\mathrm{x}_1 + a_{1,2}\mathrm{x}_2 + \ldots + a_{1,n}\mathrm{x}_n = b_1 \\ a_{2,1}\mathrm{x}_1 + a_{2,2}\mathrm{x}_2 + \ldots + a_{2,n}\mathrm{x}_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r,1}\mathrm{x}_1 + a_{r,2}\mathrm{x}_2 + \ldots + a_{r,n}\mathrm{x}_n = b_r \end{cases}$$

con matrice completa (A;B) (ridotta, con r righe, avendo soppresso le eventuali righe nulle) e matrice incompleta A (con r righe, delle quali qualcuna potrebbe essere nulla).

Supponiamo in primo luogo che il sistema dato abbia soluzione, e dimostriamo che A non può avere righe nulle (cosicché r è anche il numero delle righe non nulle di A). Se in A ci fosse una riga nulla, la corrispondente equazione del sistema sarebbe della forma

$0 = b$ con $b \neq 0$ (perché in (A;B) abbiamo soppresso le eventuali righe nulle).

Ma allora il sistema sarebbe impossibile, contro l'ipotesi.

Supponiamo ora che la matrice A abbia r righe non nulle, e pertanto non abbia alcuna riga nulla. Sotto questa ipotesi dimostreremo che il sistema ha soluzione; anzi, dimostreremo che esistono $n - r$ incognite x_{i_1}, x_{i_2}, ..., $\mathrm{x}_{i_{n-r}}$ tali che per ogni $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{n-r}}) \in \mathbb{R}^{n-r}$ esiste esattamente una soluzione del sistema per la quale è

$$\mathrm{x}_{i_1} = \alpha_{i_1}, \qquad \mathrm{x}_{i_2} = \alpha_{i_2}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{x}_{i_{n-r}} = \alpha_{i_{n-r}},$$

col che il teorema sarà completamente provato.

Poiché A è ridotta e non ha righe nulle, in ciascuna delle sue r righe c'è un elemento diverso da zero "sotto al quale" tutti gli elementi sono uguali a zero (il "pivot"). Siano j_1, j_2, $\ldots$, j_r le colonne dei pivot, e siano i_1, i_2, $\ldots$, i_{n-r} le rimanenti colonne di A. Posto

$$\mathrm{x}_{i_1} = \alpha_{i_1}, \qquad \mathrm{x}_{i_2} = \alpha_{i_2}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{x}_{i_{n-r}} = \alpha_{i_{n-r}}$$

nel sistema rimangono soltanto le r incognite x_{j_1}, x_{j_2}, $\ldots$, x_{j_r}. Poiché A è ridotta, nella r-sima equazione del sistema compare la sola incognita x_{j_r}; nella $(r-1)$-sima equazione del sistema compaiono soltanto le incognite $\mathrm{x}_{j_{r-1}}$ e x_{j_r}; e così via. Il sistema può dunque essere risolto per sostituzioni successive, ottenendo una e una sola soluzione nelle incognite $\mathrm{x}_{j_1}, \mathrm{x}_{j_2}, \ldots, \mathrm{x}_{j_r}$.

14.7 - Esercizi sui sistemi lineari.

Esercizio 14.7.1

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x + 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Soluzione — Consideriamo la matrice completa del sistema e riduciamola per righe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 := R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$R_3 := R_3 + 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Come si vede, dopo la riduzione nella matrice incompleta ci sono 2 righe non nulle mentre in quella completa ce ne sono 3: per il teorema di Rouché $-$ Capelli, il sistema non ha soluzioni.

Esercizio 14.7.2

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} x + y + z + t = -1 \\ x + y + z + 2t = 1 \\ 3x + y + 3z + t = 1 \\ 3x + 2y + 3z + 3t = 1 \end{cases}$$

Soluzione — Consideriamo la matrice completa del sistema e riduciamola per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 := R_2 - R_1$;
$R_3 := R_3 - R_1$;
$R_3 := \frac{1}{2} R_3$;
$R_4 := R_4 - 2R_1$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$R_4 := R_4 - R_2$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_4 := R_4 - R_3$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e infine

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo la riduzione, matrice incompleta e matrice completa hanno lo stesso numero di righe non nulle, cioè 3; per il teorema di Rouché-Capelli, poiché il numero delle incognite è 4, il sistema dato ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Come parametro può essere scelta una qualsiasi delle incognite purché il sistema, considerando tale incognita come paramentro, risulti ancora risolubile; la scelta più immediata nel nostro caso è la x: infatti, omettendo la prima colonna, la matrice incompleta è ancora ridotta per righe ed ha ancora 3 righe non nulle. Si potrebbe anche assumere come parametro la z. Non si potrebbe invece assumere come parametro né la y né la t.

Assumendo come parametro la x, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y + z + t = -1 - x \\ t = 2 \\ z = 1 - x \end{cases}$$

che si risolve facilmente per sostituzione (sostituendo nella prima equazione a t e z i valori ricavati dalla seconda e dalla terza). Si ottiene

$$\begin{cases} y = -4 \\ z = 1 - x \\ t = 2 \end{cases}$$

e dunque la soluzione generale è $(x, -4, 1-x, 2)$ o, se si preferisce,

$$(0, -4, 1, 2) + x\,(1, 0, -1, 0).$$

Esercizio 14.7.3

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Soluzione — Si tratta di un sistema lineare omogeneo; per il teorema 14.2.1 esiste sicuramente almeno una soluzione, la cosiddetta “soluzione banale” $(0, 0, 0)$. Per vedere se ci sono altre soluzioni, consideriamo la matrice completa del sistema e riduciamola per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 := R_2 - R_1$

$R_3 := R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 := R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il numero delle righe della matrice ridotta è uguale al numero delle incognite, e il sistema ha quindi la sola soluzione “banale” $(0, 0, 0)$.

Esercizio 14.7.4

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \\ 3x - 3y - 5z = -2 \end{cases}$$

Soluzione — Consideriamo la matrice completa del sistema e riduciamola per righe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \\ 3 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$R_2 := R_2 - 2R_1$;
$R_2 := \frac{1}{7}R_2$;
$R_3 := R_3 - R_1$;
$R_4 := 2R_4 - R_1$;
$R_5 := 2R_5 - 3R_1$;

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \\ 0 & -21 & 14 & -28 \end{pmatrix}$$

$R_3 := R_3 - 2R_2$;
$R_4 := R_4 + 11R_2$;
$R_5 := R_5 - 21R_2$;

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

$R_4 := R_4 - 5R_3$;
$R_5 := R_5 + 7R_3$;

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e infine

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo la riduzione, la matrice incompleta e la matrice completa hanno entrambe 3 righe non nulle; per il teorema di Rouché-Capelli, poiché anche il numero delle incognite è 3, il sistema dato ha esattamente una soluzione.

Alla matrice ridotta ottenuta resta associato il sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ -y + z = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

che si risolve facilmente per sostituzione. Si ottiene

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

e dunque la soluzione del sistema dato è $(3, 2, 1)$.

Le soluzioni degli esercizi 14.7.5, 14.7.6, 14.7.7, 14.7.8, 14.7.9, 14.7.10, 14.7.11, 14.7.12, 14.7.13, 14.7.14, 14.7.15 e 14.7.16 saranno date nella sezione 14.9 (pagina 129).

Esercizio 14.7.5

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ 2x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.6

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = -2 \\ 3x + y - 4z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.7

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} x + y - z + t = 3 \\ 2\,x - y + z - t = 3 \\ x - y - 2\,z + 2\,t = 1 \\ x - 4\,y + z - t = -2 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.8

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} x - 2\,y + z - t = 3 \\ x + y - z + 2\,t = 1 \\ 2\,x + y - 2\,z = 0 \\ 2\,y - 2\,z - t = 2 \\ x + 3\,y - 3\,z + t = 3 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.9

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 2\,x - y + z = 0 \\ 3\,x + 2\,y - 2\,z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.10

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x - y - 2\,z = 0 \\ x - 2\,y - z = 0 \\ x + y - 2\,z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.11

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t, w:

$$\begin{cases} x - y + 2z - t + w = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \\ 3y - 5z + 3t - 2w = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.12

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 2t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 3x + 3y - 3t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.13

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ x + 2y - 2z + 2t = -1 \\ 3y - 3z + 3t = -2 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.14

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t, w:

$$\begin{cases} x - 2y - t - w = 0 \\ 2x + y + z - t - w = 0 \\ 5x + 2z - 3t - 3w = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.15

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + z - t = 0 \\ 3x - y + 3z - t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14.7.16

Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} 3\mathrm{x} + 4\mathrm{y} + \mathrm{z} + 2\mathrm{t} = 3 \\ 6\mathrm{x} + 8\mathrm{y} + 2\mathrm{z} + 5\mathrm{t} = 7 \\ 9\mathrm{x} + 12\mathrm{y} + 3\mathrm{z} + 10\mathrm{t} = 13 \\ 12\mathrm{x} + 16\mathrm{y} + 4\mathrm{z} + 12\mathrm{t} = 16 \end{cases}$$

14.8 - Esercizi sui sistemi lineari dipendenti da un parametro.

Esercizio 14.8.1

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} - 3\,\mathrm{y} + k\,\mathrm{z} = 1 \\ \mathrm{y} + \mathrm{z} = k \\ k\,\mathrm{x} - 6\mathrm{y} - 2\,\mathrm{z} = -2 \end{cases}$$

Soluzione — Consideriamo la matrice completa del sistema e riduciamola per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ k & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{R}_3 := \mathrm{R}_3 - k\mathrm{R}_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 3k-6 & -2-k^2 & -2-k \end{pmatrix}$$

$\mathrm{R}_3 := \mathrm{R}_3 + 3(2-k)\mathrm{R}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & (1-k)(k+4) & (1-k)(3k-2) \end{pmatrix}$$

Per $k \neq 1, -4$ la matrice incompleta e quella completa sono ridotte e hanno 3 righe non nulle, quante sono le incognite: il sistema ha esattamente una soluzione.

Per $k = 1$, la matrice incompleta e quella completa si riducono sopprimendo la terza riga e hanno 2 righe non nulle: il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera (qualunque incognita può essere assunta come incognita libera).

Per $k = -4$, la matrice incompleta si riduce sopprimendo la terza riga e ha 2 righe non nulle, mentre la matrice completa è ridotta e ha 3 righe non nulle: il sistema è impossibile.

Esercizio 14.8.2

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} + 2\,\mathrm{z} = k \\ 4\,\mathrm{x} + k\,\mathrm{y} + k\,\mathrm{z} = 2 \\ k\,\mathrm{x} - k\,\mathrm{y} + 4\,\mathrm{z} = 4 \end{cases}$$

Soluzione — Consideriamo la matrice completa del sistema e riduciamola per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & k \\ 4 & k & k & 2 \\ k & -k & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{R}_2 := \mathrm{R}_2 - 4\mathrm{R}_1$
$\mathrm{R}_3 := \mathrm{R}_3 - k\mathrm{R}_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & k \\ 0 & k+4 & k-8 & 2-4k \\ 0 & 0 & 2(2-k) & (2-k)(2+k) \end{pmatrix}$$

Per $k \neq -4, 2$ la matrice incompleta e quella completa sono ridotte e hanno 3 righe non nulle, quante sono le incognite: il sistema ha esattamente una soluzione.

Per $k = 2$, la matrice incompleta e quella completa si riducono sopprimendo la terza riga e hanno 2 righe non nulle: il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera (qualunque incognita può essere assunta come incognita libera).

Per $k = -4$, la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

e per completare la riduzione si deve porre $\mathrm{R}_3 := \mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_2$.

Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e dunque per $k = -4$ il sistema è impossibile.

Le soluzioni degli esercizi 14.8.3, 14.8.4, 14.8.5, 14.8.6, 14.8.7, 14.8.8, 14.8.9, 14.8.10, 14.8.11, 14.8.12, 14.8.13, 14.8.14, 14.8.15, 14.8.16, 14.8.17, 14.8.18 e 14.8.19 saranno date nella sezione 14.10 (pagina 131).

Esercizio 14.8.3

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} + (k+3)\,\mathrm{z} = k+3 \\ \mathrm{x} + (k-5)\,\mathrm{y} + 7\,\mathrm{z} = 2 \\ (k+2)\,\mathrm{x} - 6\,\mathrm{y} + 6\,\mathrm{z} = 1 \\ k\mathrm{x} - k\mathrm{y} - (k+4)\mathrm{z} = -k-4 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.4

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{y} - \mathrm{z} = 1 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} - k\,\mathrm{z} = 0 \\ \mathrm{x} - 3\,\mathrm{y} = -2 \\ \mathrm{x} + k\,\mathrm{y} - 2\,\mathrm{z} = 1 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.5

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} - 2\,\mathrm{y} - k\,\mathrm{z} - \mathrm{t} = 0 \\ \mathrm{x} - k\,\mathrm{y} - \mathrm{t} = 0 \\ k\,\mathrm{x} + (2-3k)\,\mathrm{y} - k\,\mathrm{t} = 0 \\ (k+1)\,\mathrm{x} - 4\,\mathrm{y} - 2\,\mathrm{z} - 4\,\mathrm{t} = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.6

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} + k\,\mathrm{t} = -1 \\ k\,\mathrm{x} + k\,\mathrm{y} + k\,\mathrm{z} + 2k\,\mathrm{t} = 1 \\ (k-1)\,\mathrm{x} + \mathrm{y} + (3-k)\,\mathrm{t} = 0 \\ (2k+1)\,\mathrm{x} + (k+1)\,\mathrm{y} + (2k+1)\,\mathrm{z} + 3k\,\mathrm{t} = k \end{cases}$$

Esercizio 14.8.7

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} 5k\,\mathrm{x} + 5\,\mathrm{y} + 2k\,\mathrm{z} = 12 \\ k\,\mathrm{x} - \mathrm{z} = 0 \\ 6\,\mathrm{x} + 5\,\mathrm{y} + k\,\mathrm{z} = 12 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.8

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + k\,\mathrm{z} = 0 \\ -\mathrm{x} + 2\,\mathrm{y} + \mathrm{z} = 0 \\ k\,\mathrm{y} + \mathrm{z} = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.9

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + (k+1)\,\mathrm{z} = 2k \\ k\,\mathrm{y} + 2k\,\mathrm{z} = -1 \\ \mathrm{x} + 5\,\mathrm{z} = k + 4 \\ \mathrm{x} - k\,\mathrm{y} - 3\,\mathrm{z} = 3k - 3 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.10

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} k\,\mathrm{x} + k\,\mathrm{y} = 1 \\ (2k-1)\,\mathrm{x} + k\,\mathrm{y} + \mathrm{z} = 2 \\ (k-1)\,\mathrm{x} + 2k\,\mathrm{y} + (k+1)\,\mathrm{z} = 2k+4 \\ (3k-1)\,\mathrm{x} + 2k\,\mathrm{y} + \mathrm{z} = 3 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.11

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} k\,\mathrm{x} + \mathrm{y} + (k+2)\,\mathrm{z} = k+2 \\ 2\,\mathrm{x} + \mathrm{y} - k\,\mathrm{z} = 3 \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = 3 \\ (2-k)\,\mathrm{x} + 2\,\mathrm{y} + 2\,\mathrm{z} = 7-k \end{cases}$$

Esercizio 14.8.12

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} k\,\mathrm{x} + 2\,\mathrm{y} - \mathrm{t} = 1 \\ -\mathrm{y} + \mathrm{z} + \mathrm{t} = k \\ 3\,\mathrm{z} + (k+2)\,\mathrm{t} = 2k \\ \mathrm{y} + \mathrm{z} + k\,\mathrm{t} = 1 \\ k\,\mathrm{x} + 2\,\mathrm{y} + \mathrm{z} = k \end{cases}$$

Esercizio 14.8.13

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} 2k\,\mathrm{x} + 2\,\mathrm{y} + (k-1)\,\mathrm{z} = k-9 \\ k\,\mathrm{x} + \mathrm{y} + 3\,\mathrm{z} = -6-5k \\ -\mathrm{x} - k\,\mathrm{y} + (k+2)\,\mathrm{z} = -3 \\ k\,\mathrm{x} + \mathrm{y} + (k-4)\,\mathrm{z} = 6k-3 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.14

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} 3\,\mathrm{x} + (k-1)\,\mathrm{y} + k\,\mathrm{z} + (1+2\,k)\,\mathrm{t} = k+3 \\ (k-4)\,\mathrm{x} + (k+1)\,\mathrm{y} + (k+2)\,\mathrm{t} = 2\,k+3 \\ k\,\mathrm{x} + (k-2)\,\mathrm{t} = 4\,k-6 \\ (k-1)\,\mathrm{x} + (2-k)\,\mathrm{t} = 3-k \end{cases}$$

Esercizio 14.8.15

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t, w è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + k\,\mathrm{y} - \mathrm{w} = 0 \\ 2\,\mathrm{x} + 2k\,\mathrm{y} + 5\,\mathrm{t} - 2\,\mathrm{w} = 5 \\ 3\,\mathrm{x} + 3k\,\mathrm{y} - 2\,\mathrm{z} - \mathrm{t} - 3\,\mathrm{w} = -1 \\ (k-1)\,\mathrm{x} + k\,\mathrm{y} + \mathrm{z} - \mathrm{w} = 1 \\ 5\,\mathrm{x} + 5k\,\mathrm{y} - \mathrm{z} + 3\,\mathrm{t} - 5\,\mathrm{w} = 3 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.16

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + 4\,\mathrm{y} = 6-k \\ 4\,\mathrm{x} + \mathrm{y} + k^2\,\mathrm{z} = k-3 \\ 3\,\mathrm{x} + 2\,\mathrm{y} + 6\,\mathrm{z} = -1 \\ 5\,\mathrm{x} + 5\,\mathrm{y} + k^2\,\mathrm{z} = 3 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.17

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} + 3\,\mathrm{z} + k\,\mathrm{t} = k + 2 \\ 2\,\mathrm{x} - k\,\mathrm{y} + 2\,\mathrm{z} + \mathrm{t} = 0 \\ 2\,\mathrm{x} + (1-k)\,\mathrm{y} - 2\,\mathrm{z} - \mathrm{t} = 1 \\ \mathrm{y} - 4\,\mathrm{z} - 2\,\mathrm{t} = 1 \\ -\mathrm{x} + \mathrm{y} - 3\,\mathrm{z} + k^2\,\mathrm{t} = -1 \end{cases}$$

Esercizio 14.8.18

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} + k\,\mathrm{z} = k \\ k\,\mathrm{x} + \mathrm{y} - \mathrm{z} = 0 \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} - k\,\mathrm{z} = k \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} + 3k\,\mathrm{z} = k \end{cases}$$

Esercizio 14.8.19

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t è risolubile (specificando il numero delle incognite libere) e per quali è invece impossibile:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} + (k+1)\,\mathrm{z} + (k+4)\,\mathrm{t} = 0 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} - 3\,\mathrm{z} = 0 \\ (k-1)\,\mathrm{x} + (k+1)\,\mathrm{y} + (k+4)\,\mathrm{z} - 3\,\mathrm{t} = 0 \\ 2\,\mathrm{x} + (k-2)\,\mathrm{z} + (k+4)\,\mathrm{t} = 0 \\ k\,\mathrm{x} + k\,\mathrm{y} + (k+1)\,\mathrm{z} = 0 \end{cases}$$

14.9 - Soluzione degli esercizi proposti nella sezione 14.7.

Soluzione dell'esercizio 14.7.5

Il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da una incognita libera.
Scegliendo come incognita libera la x, la generica soluzione è $(x, x-1, 0)$;
scegliendo come incognita libera la y, la generica soluzione è $(y+1, y, 0)$.
Si noti che la z non può essere scelta come incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.7.6

Il sistema ha esattamente una soluzione: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

Soluzione dell'esercizio 14.7.7

Il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da una incognita libera.
Scegliendo come incognita libera la z, oppure la t, la generica soluzione è $(2, 1, \alpha, \alpha)$. Si noti che né la x né la y possono essere scelte come incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.7.8

Il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.7.9

Il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da una incognita libera.
Scegliendo come incognita libera la y, oppure la z, la generica soluzione è $(0, \alpha, \alpha)$. Si noti che la x non può essere scelta come incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.7.10

Il sistema ammette soltanto la soluzione nulla $(0, 0, 0)$.

Soluzione dell'esercizio 14.7.11

Il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.7.12

Il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due incognite libere.
Scegliendo come incognite libere la x e la y, la generica soluzione è $(x, y, 0, x + y)$;
scegliendo come incognite libere la x e la t, la generica soluzione è $(x, t - x, 0, t)$;
scegliendo come incognite libere la y e la t, la generica soluzione è $(t - y, y, 0, t)$.
Si noti che la z non può essere scelta come incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.7.13

Il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due incognite libere.
Scegliendo come incognite libere la y e la z, la generica soluzione è $\left(\frac{1}{3}, y, z, z - y - \frac{2}{3}\right)$;
scegliendo come incognite libere la y e la t, la generica soluzione è $\left(\frac{1}{3}, y, y + t + \frac{2}{3}, t\right)$;
scegliendo come incognite libere la z e la t, la generica soluzione è $\left(\frac{1}{3}, z - t - \frac{2}{3}, z, t\right)$.
Si noti che la x non può essere scelta come incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.7.14

Il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da tre incognite libere.

Scegliendo come incognite libere x, y e t, la generica soluzione è
$$(x,\ \ y,\ \ -x - 3y,\ \ t,\ \ x - 2y - t)\ ;$$

scegliendo come incognite libere x, y e w, la generica soluzione è
$$(x,\ \ y,\ \ -x - 3y,\ \ x - 2y - w,\ \ w);$$

scegliendo come incognite libere x, z e t, la generica soluzione è
$$\left(x,\ \ -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}z,\ \ z,\ \ t,\ \ \tfrac{5}{3}x + \tfrac{2}{3}z - t\right);$$

scegliendo come incognite libere x, z e w, la generica soluzione è
$$\left(x,\ \ -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}z,\ \ z,\ \ \tfrac{5}{3}x + \tfrac{2}{3}z - w,\ \ w\right);$$

scegliendo come incognite libere y, z e t, la generica soluzione è
$$(-3y - z,\ \ y,\ \ z,\ \ t,\ \ -5y - z - t);$$

scegliendo come incognite libere y, z e w, la generica soluzione è
$$(-3y - z,\ \ y,\ \ z,\ \ -5y - z - w,\ \ w);$$

scegliendo come incognite libere y, t e w, la generica soluzione è
$$(2y + t + w,\ \ y,\ \ -5y - t - w,\ \ t,\ \ w);$$

scegliendo come incognite libere z, t e w, la generica soluzione è
$$\left(-\tfrac{2}{5}z + \tfrac{3}{5}t + \tfrac{3}{5}w,\ \ -\tfrac{1}{5}z - \tfrac{1}{5}t - \tfrac{1}{5}w,\ \ z,\ \ t,\ \ w\right);$$

scegliendo come incognite libere x, t e w, la generica soluzione è
$$\left(x,\ \ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}w,\ \ -\tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{3}{2}w,\ \ t,\ \ w\right).$$

Si noti che non è possibile scegliere come incognite libere x, y e z.

Soluzione dell'esercizio 14.7.15

Il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da una incognita libera.
Scegliendo come incognita libera la x, la generica soluzione è $(x, \; 0, \; -x, \; 0)$;
scegliendo come incognita libera la z, la generica soluzione è $(-z, \; 0, \; z, \; 0)$.
Si noti che né la y né la z possono essere scelte come incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.7.16

Il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due incognite libere.

Scegliendo come incognite libere la x e la y, la generica soluzione è
$$(x, \; y, \; 1 - 3x - 4y, \; 1) \; ;$$
scegliendo come incognite libere la x e la z, la generica soluzione è
$$(x, \; \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}z, \; z, \; 1);$$
scegliendo come incognite libere la y e la z, la generica soluzione è
$$(\tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}y - \tfrac{1}{3}z, \; y, \; z, \; 1).$$
Si noti che la t non può essere scelta come incognita libera.

14.10 - Soluzione degli esercizi proposti nella sezione 14.8.

Soluzione dell'esercizio 14.8.3

Per $k \neq -2, 4$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = -2$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 4$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.4

Per $k = 4$ il sistema ha esattamente una soluzione, per tutti gli altri valori di k il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.5

Il sistema dato è un sistema omogeneo, quindi ammette soluzione per ogni valore di k.
Per $k \neq 0, 1, 2, 3$ il sistema ha soltanto la soluzione nulla $(0, 0, 0, 0)$.
Per $k = 0, 1, 2, 3$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.8.6

Per $k \neq 0, 1, 2$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = 1$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 0, 2$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.7

Per $k \neq -6, 1$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = -6, 1$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.8.8

Il sistema dato è un sistema omogeneo, quindi ammette soluzione per ogni valore di k.
Per $k \neq -2, 1$ il sistema ha soltanto la soluzione nulla $(0, 0, 0)$.
Per $k = -2, 1$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.

Soluzione dell'esercizio 14.8.9

Per $k \neq 0, 4$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = 4$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 0$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.10

Per $k \neq 0, -1$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = -1$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 0$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.11

Per $k \neq 0, -1$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = -1, 0$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.12

Per $k \neq 0, 1$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = 0$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 1$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.13

Per $k \neq \pm 1, 7$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = \pm 1$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 7$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.14

Per $k \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 2$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = 0, 2$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = -1, \frac{1}{2}$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.15

Per $k \neq 2$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 2$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.16

Per $k \neq \pm 3$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = -3$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 3$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.17

Per $k \neq -1, 0, 1$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = -1$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 0, 1$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.18

Per $k \neq 0, 1$ il sistema ha esattamente una soluzione.
Per $k = 0$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.
Per $k = 1$ il sistema è impossibile.

Soluzione dell'esercizio 14.8.19

Il sistema dato è un sistema omogeneo, quindi ammette soluzione per ogni valore di k.
Per $k \neq \pm 1$ il sistema ha soltanto la soluzione nulla $(0, 0, 0)$.
Per $k = \pm 1$ il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da una incognita libera.

15.- FUNZIONI $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

15.1 - Generalità.

L'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si indica con $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Si definiscono in tale insieme operazioni binarie (cfr. 7.1) dette *somma*, *prodotto*, *quoziente* ed *elevamento a potenza*: precisamente, se **f**, **g** $\in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, si pone

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x) := \mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x)$$

e la funzione $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ così definita si dice *somma* delle funzioni **f** e **g**;

$$(\mathbf{fg})(x) := \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)$$

e la funzione **fg** così definita si dice *prodotto* delle funzioni **f** e **g**;

$$\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)(x) := \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)}$$

e la funzione $\dfrac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ così definita si dice *quoziente* delle funzioni **f** e **g**;

$$(\mathbf{f}^{\,\mathbf{g}})(x) := \mathbf{f}(x)^{\,\mathbf{g}(x)}$$

e la funzione $\mathbf{f}^{\,\mathbf{g}}$ così definita si dice *elevamento a potenza* con *base* **f** ed *esponente* **g**.

Anche la *composizione* tra funzioni definita in 4.7 è un'operazione binaria nell'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

È interessante (e importante!) mettere in relazione col dominio di **f** e **g** quello delle varie funzioni definite a partire da esse come si è appena accennato; precisamente, si ha

$$\mathcal{D}(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \mathcal{D}(\mathbf{fg}) = \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{g});$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right) = \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \{x \in \mathcal{D}(\mathbf{g}) \;/\; \mathbf{g}(x) \neq 0\};$$
$$\mathcal{D}(\mathbf{f}^{\,\mathbf{g}}) = \mathcal{D}(\mathbf{g}) \cap \{x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \;/\; \mathbf{f}(x) > 0\};$$
$$\mathcal{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = \{x \in \mathcal{D}(\mathbf{g}) \;/\; \mathbf{g}(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{f})\}.$$

Le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che considereremo saranno quasi esclusivamente ottenute mediante somma, prodotto, quoziente, elevamento a potenza, composizione a partire dalle seguenti funzioni (dette *funzioni elementari*) che supponiamo note (generalmente dagli studi effettuati nella scuola secondaria superiore):

(i) le funzioni polinomiali (associate ai polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x)([24]); a questa famiglia appartengono in particolare la funzione identità $\mathbf{id}_{\mathbb{R}}$ (cfr. 4.4.3) e le funzioni costanti.

(ii) le funzioni trigonometriche ($\mathbf{sin}(x)$, $\mathbf{cos}(x)$, $\mathbf{tg}(x)$) e le loro inverse ($\mathbf{arcsin}(x)$, $\mathbf{arccos}(x)$, $\mathbf{arctg}(x)$);

(iii) per ogni $a \in \mathbb{R}^+$, la funzione potenza x^a di esponente a, la funzione esponenziale $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{a}}(x)$ (che indicheremo anche con a^x) e (se $a \neq 1$) la funzione logaritmica $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(x)$ in base a (cfr. 10.4);

(iv) la funzione “valore assoluto” ($|x|$, definita in 10.1, per la quale si veda anche la sez. 15.2).

Occasionalmente sarà utile prendere in considerazione anche funzioni che non rientrano nelle famiglie sopra considerate; ad esempio la funzione “parte intera” ($[x]$, che associa al numero reale x il più grande numero intero non superiore a x), la funzione “segno” ($\mathbf{sgn}(x)$, che assume valore $+1$ se $x > 0$, assume valore 0 se $x = 0$, e assume valore -1 se $x < 0$), la “funzione di Dirichlet” ($\mathbf{Dir}(x)$, che assume valore $+1$ se x è razionale, e assume valore -1 se x è irrazionale) ed altre simili a quest’ultima (cfr. esempio 16.1.5 ed esempio 18.4.3).

Particolare rilevanza avrà nel seguito la nozione di “intervallo” introdotta in 5.3. Si noti che lo stesso insieme $\mathbb{R}$ si considera un intervallo (aperto, illimitato a sinistra e a destra) e che un intervallo non può, per definizione, consistere di un solo elemento. Per un intervallo limitato si introduce la nozione di *ampiezza*: se l’intervallo ha estremi a e b, la sua ampiezza è per definizione il numero reale $|b - a|$.

Esercizio 15.1.1

Calcolare: $[\frac{2}{3}]$; $[1]$; $[-\frac{3}{4}]$; $[\sqrt{2}]$; $[-\sqrt{3}]$; $[\pi]$; $[0]$; $[-7]$.

Esercizio 15.1.2

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\mathbf{f}_1(x) := \sqrt{\mathbf{log}_2(x)}\,; \qquad \mathbf{f}_2(x) := \mathbf{log}_3(\mathbf{log}_5(x) - 1); \qquad \mathbf{f}_3(x) := \frac{x-1}{x+2}\,.$$

[24] Nel seguito utilizzeremo la stessa notazione sia per indicare un polinomio a coefficienti reali nella indeterminata x sia per indicare la funzione polinomiale ad esso associata: ciò non darà mai luogo ad equivoci.

Esercizio 15.1.3

Dimostrare che le funzioni $\sqrt{x^2}$ e $|x|$ sono la stessa funzione (cfr. la nota 10 a pagina 36).

Esercizio 15.1.4

Dire, motivando la risposta, se

$$\mathbf{f}_1(x) := \sqrt{x^2} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{f}_2(x) := (\sqrt{x})^2$$

sono la stessa funzione oppure no.

Esercizio 15.1.5

Dire, motivando la risposta, se

$$\mathbf{f}_1(x) := 2^{\mathbf{log}_2(x)} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{f}_2(x) := \mathbf{log}_2(2^x)$$

sono la stessa funzione oppure no.

15.2 - Osservazioni sulla funzione "valore assoluto".

Teorema 15.2.1

Se $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $\qquad |x| \leq y \quad \Leftrightarrow \quad -y \leq x \leq y.$

Dimostrazione — Sia $|x| \leq y$; allora $y \geq 0$, e $-y \leq 0$. Se $x \geq 0$, è certamente $x \geq -y$; inoltre, $|x| = x$ e dunque $x \leq y$. Se invece $x < 0$, è certamente $x < y$; inoltre, $|x| = -x$ e dunque $-x \leq y$, da cui (teorema 9.4.8 (i)) $-y \leq x$.

Viceversa, sia $-y \leq x \leq y$. Se $x \geq 0$, è $x = |x|$ e dunque la $x \leq y$ equivale alla $|x| \leq y$. Se invece $x < 0$, è $x = -|x|$ e dunque la $-y \leq x$ equivale alla $-y \leq -|x|$ ossia (teorema 9.4.8 (i)) alla $|x| \leq y$.

Corollario 15.2.2

Se $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$, si ha $\quad |x_1 - x_2| \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x_2 - y \leq x_1 \leq x_2 + y.$

Teorema 15.2.3

Se α, $\beta \in \mathbb{R}$, si ha $$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|.$$

Dimostrazione — Poiché $|\alpha| \leq |\alpha|$, per il teorema 15.2.1 ($x := \alpha$, $y := |\alpha|$) si ha
$$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|.$$
Analogamente, $$-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|.$$
Utilizzando la 9.4.CO1 se ne deduce che
$$-|\alpha|-|\beta| \leq \alpha+\beta \leq |\alpha|+|\beta|$$
ossia $$-(|\alpha|+|\beta|) \leq \alpha+\beta \leq |\alpha|+|\beta|$$
da cui l'asserto per il teorema 15.2.1 ($x := \alpha+\beta$, $y := |\alpha|+|\beta|$).

Teorema 15.2.4

Se α, $\beta \in \mathbb{R}$, si ha $$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Dimostrazione — Si tratta di una verifica immediata, per la quale è opportuno distinguere quattro casi: $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$; $\alpha \geq 0$, $\beta < 0$; $\alpha < 0$, $\beta \geq 0$; $\alpha < 0$, $\beta < 0$.

15.3 - Grafico di una funzione $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Fissato nel piano un SdR cartesiano (ortogonale, monometrico) **O*xy***, si dice *grafico* di $\mathbf{f}$ l'insieme dei punti del piano le cui coordinate x, y verificano la condizione $$y = \mathbf{f}(x).$$

Con la notazione di 13.2, possiamo anche dire che il grafico di $\mathbf{f}$ è il luogo geometrico rappresentato dall'equazione $$y - \mathbf{f}(x) = 0.$$

15.4 - Funzioni pari, funzioni dispari, funzioni periodiche.

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che $\mathbf{f}$ è *pari* se per ogni $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ è $-x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e inoltre
$$\mathbf{f}(-x) = \mathbf{f}(x).$$
Si dice che $\mathbf{f}$ è *dispari* se per ogni $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ è $-x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e inoltre
$$\mathbf{f}(-x) = -\mathbf{f}(x).$$

Se $\mathbf{f}$ è pari o dispari, il comportamento di $\mathbf{f}$ in $[0, +\infty)$ può facilmente essere dedotto da quello in $(-\infty, 0]$ (e viceversa). In particolare, per l'osservazione 15.2.3, il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, quello di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.

Esercizio [*] 15.4.1

Determinare tutte le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \mathbb{R}$ il cui grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

Esempio 15.4.2

Sono funzioni pari: la $\mathbf{f}(x) := |x|$, la $\mathbf{f}(x) := \mathbf{cos}(x)$ e tutte le funzioni polinomiali nella cui espressione x compare solo con esponente pari (es.: $\mathbf{f}(x) := x^2$, $\mathbf{f}(x) := x^4$, $\mathbf{f}(x) := 3x^{16} - 2x^2 + 3$).

Esempio 15.4.3

Sono funzioni dispari: la $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}(x)$, la $\mathbf{f}(x) := \mathbf{tg}(x)$ e tutte le funzioni polinomiali nella cui espressione x compare solo con esponente dispari (es.: $\mathbf{f}(x) := x$, $\mathbf{f}(x) := x^3$, $\mathbf{f}(x) := 3x^{13} - 2x^5 + 3x$; si noti che in particolare il termine noto deve essere uguale a zero).

Esercizio 15.4.4

Si stabilisca se la funzione $$\mathbf{f}(x) := \mathbf{log}_2 \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

è pari, dispari oppure né pari né dispari.

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia k un numero reale positivo. Si dice che $\mathbf{f}$ è *periodica di periodo* k se per ogni $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ è $x + k \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e inoltre

$$\mathbf{f}(x + k) = \mathbf{f}(x).$$

Se $\mathbf{f}$ è periodica di periodo k, il comportamento di $\mathbf{f}$ su tutto $\mathbb{R}$ può facilmente essere dedotto dal comportamento in un qualsiasi intervallo di ampiezza almeno k. In particolare, il grafico di $\mathbf{f}$ si ottiene "ricopiando" infinite volte il grafico della sua restrizione a un qualsiasi intervallo di ampiezza k.

Una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *periodica* se esiste $k \in \mathbb{R}^+$ tale che $\mathbf{f}$ è periodica di periodo k. Si noti che, se $\mathbf{f}$ è periodica di periodo k, per definizione $\mathbf{f}$ è periodica di periodo nk per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$; generalmente si considera (quando esiste) il

$$\mathbf{min}\ \{k \in \mathbb{R}^+ / \ \mathbf{f} \text{ è periodica di periodo } k\}.$$

Esercizio [*] 15.4.5

Si dia un esempio di funzione **f** periodica per la quale non esiste il

$$\mathbf{min}\ \{k \in \mathbb{R}^+ /\ \mathbf{f} \text{ è periodica di periodo } k\}.$$

Esempio 15.4.6

Sono funzioni periodiche: la $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}(x)$ (di periodo 2π), la $\mathbf{f}(x) := \mathbf{cos}(x)$ (di periodo 2π), la $\mathbf{f}(x) := \mathbf{tg}(x)$ (di periodo π) e tutte le funzioni costanti.

15.5 - Estremi.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si dice che **f** è *superiormente limitata* se l'immagine di **f** (cfr. 4.3) è superiormente limitata (cfr. 5.5), cioè se esiste un numero reale λ tale che $\mathbf{f}(x) \leq \lambda \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se **f** è superiormente limitata, l'estremo superiore (cfr. 5.6) dell'immagine di **f** si dice *estremo superiore di* **f**.

Si dice che **f** è *inferiormente limitata* se l'immagine di **f** è inferiormente limitata (cfr. 5.5), cioè se esiste un numero reale λ tale che $\mathbf{f}(x) \geq \lambda \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se **f** è inferiormente limitata, l'estremo inferiore (cfr. 5.7) dell'immagine di **f** si dice *estremo inferiore di* **f**.

Si dice che **f** è *limitata* se **f** è superiormente limitata ed inferiormente limitata, cioè se esistono due numeri reali a, b tali che l'immagine di **f** è contenuta nell'intervallo $[a, b]$; o, equivalentemente, se esiste un numero reale λ tale che $|\mathbf{f}(x)| \leq \lambda \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Si dice che **f** *ha massimo* se l'immagine di **f** ha massimo (cfr. 5.4); il massimo dell'immagine di **f** si dice *massimo* di **f**. Se **f** ha massimo M, si dice *punto di massimo* per **f** ogni $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ per il quale si abbia $\mathbf{f}(x) = M$.

Si dice che **f** *ha minimo* se l'immagine di **f** ha minimo (cfr. 5.4); il minimo dell'immagine di **f** si dice *minimo* di **f**. Se **f** ha minimo m, si dice *punto di minimo* per **f** ogni $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ per il quale si abbia $\mathbf{f}(x) = m$.

Sia $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che **f** è *limitata in* **I**, che **f** *ha massimo in* **I**, che **f** *ha minimo in* **I** se la restrizione di **f** a **I** (cfr. 4.5) rispettivamente è limitata, ha massimo, ha minimo. Se esistono, l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il massimo e il minimo della restrizione di **f** ad **I** si dicono rispettivamente *estremo superiore di* **f** *in* **I**, *estremo inferiore di* **f** *in* **I**, *massimo di* **f** *in* **I** e *minimo di* **f** *in* **I**; gli eventuali punti di massimo e minimo per la restrizione di **f** a **I** si dicono rispettivamente *punti di massimo per* **f** *in* **I** e *punti di minimo per* **f** *in* **I**.

Teorema 15.5.1

Sia $\mathbf{f}$ una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e siano $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sottoinsiemi di $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se $\mathbf{f}$ è superiormente limitata [inferiormente limitata, limitata] in $\mathbf{A}$ e in $\mathbf{B}$, è superiormente limitata [inferiormente limitata, limitata] anche in $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

Dimostrazione — Proviamo l'asserto per $\mathbf{f}$ superiormente limitata in $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, lasciando come banale esercizio gli altri due casi.

Supponiamo che $\mathbf{f}$ sia superiormente limitata in $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Ciò significa che esistono due numeri reali λ_1, λ_2 tali che

$$\mathbf{f}(x) \leq \lambda_1 \quad \forall x \in \mathbf{A} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{f}(x) \leq \lambda_2 \quad \forall x \in \mathbf{B}.$$

Posto $\lambda := \mathbf{max}\,\{\lambda_1, \lambda_2\}$, si ha $\quad \mathbf{f}(x) \leq \lambda \quad \forall x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
cioè l'asserto.

15.6 - Intorni. Punti di accumulazione.

Sia $\mathcal{R}$ l'insieme dei punti della retta. Sappiamo (teorema 10.2.1) che, fissati in $\mathcal{R}$ due punti $\mathbf{O}$ (*origine*) e $\mathbf{U}$ (*punto unità*), esiste una corrispondenza biunivoca $\mathbf{f}$ tra $\mathcal{R}$ e $\mathbb{R}$ per la quale $\mathbf{f}(\mathbf{O}) = 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = 1$ e, comunque presi $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2 \in \mathcal{R}$, il segmento $\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$ ha misura $|\mathbf{f}(\mathbf{P}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{P}_2)|$ rispetto all'unità di misura $\overline{\mathbf{OU}}$. Con abuso di linguaggio ormai comune, si usa identificare ciascun numero reale col punto della retta che gli corrisponde mediante $\mathbf{f}$: in tale contesto, gli elementi di $\mathbb{R}$ sono detti *punti*; inoltre, se α, $\beta \in \mathbb{R}$ il numero reale $|\alpha - \beta|$ si dice *distanza* tra α e β.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si dice *intorno* di x_0 un intervallo aperto (cfr. 5.3) al quale x_0 appartenga. Si dice *intorno di x_0 individuato da δ* (o anche *intorno di centro x_0 e raggio δ*) l'intervallo aperto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; è chiaro che si tratta di un particolare intorno di x_0.

Esempio 15.6.1

$(-1, 3)$ è un intorno di 0.

Esempio 15.6.2

$(-1, 3)$ è l'intorno di centro 1 e raggio 2.

Esercizio [*] 15.6.3

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}^+$. Si provi che

$$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \ /\ |\ x - x_0\ |\ < \delta\}.$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si dice *intorno forato* di x_0 un intorno di x_0 privo di x_0, ossia un insieme della forma $\mathbf{I} \backslash \{x_0\}$ con **I** intorno di x_0.

Si dice *intorno sinistro* di x_0 un intervallo aperto (a, x_0) con $a < x_0$; si dice *intorno destro* di x_0 un intervallo aperto (x_0, b) con $x_0 < b$. Gli intorni destri e sinistri di x_0 non sono, in base alla definizione, intorni di x_0; si noti tuttavia che l'unione di un (qualsiasi) intorno sinistro di x_0 ed un (qualsiasi) intorno destro di x_0 è un intorno forato di x_0.

Esempio 15.6.4

$(2, 3)$ è un intorno sinistro di 3; $(3, 5)$ è un intorno destro di 3; $(2, 3) \cup (3, 5)$ $(= (2, 5) \backslash \{3\})$ è un intorno forato di 3.

Sia $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$. Un elemento x_0 di **A** si dice *interno* ad **A** se esiste un intorno di x_0 contenuto in **A**. L'insieme degli elementi di **A** interni ad **A** si dice l'*interno* di **A**.

Esempio 15.6.5

Sia $\mathbf{A} := [0, 3]$; 1 è interno ad **A**, 0 e 3 non sono interni ad **A**. L'interno di **A** è l'intervallo aperto $(0, 3)$.

Osservazione 15.6.6

Siano a, b numeri reali.

L'interno di $[a, b]$ è (a, b); l'interno di $[a, b)$ è (a, b); l'interno di $(a, b]$ è (a, b); l'interno di $(- \infty, b]$ è $(- \infty, b)$; l'interno di $[a,\ + \infty)$ è $(a,\ + \infty)$.

Sia $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un *punto di accumulazione* per **A** se in ogni intorno forato di x_0 esiste almeno un elemento di **A**.

Esempi

15.6.7 Ogni elemento di $[0, 1]$ è punto di accumulazione per $(0, 1)$.

15.6.8 Ogni elemento di $[0, 1]$ è punto di accumulazione per $[0, 1)$.

15.6.9 Ogni elemento di $[0, 2]$ è punto di accumulazione per $(0, 1) \cup (1, 2)$.

15.6.10 Non esistono punti di accumulazione per $\mathbb{N}$.

15.6.11 Sia **A** l'insieme dei numeri reali della forma $\frac{1}{n}$ con n numero intero positivo. Il numero reale 1 appartiene ad **A**, ma non è punto di accumulazione per **A**; il numero reale 0 non appartiene ad **A**, ma è punto di accumulazione per **A**.

15.6.12 Ogni elemento di $[0, 1]$ è punto di accumulazione per $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Teorema 15.6.13

Sia $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per **A**. In ogni intorno forato di x_0 (e quindi in ogni intorno di x_0) esistono infiniti elementi di **A**; in particolare, **A** ha infiniti elementi.

Dimostrazione — Procediamo per assurdo, supponendo che esista un intorno forato di x_0 al quale appartiene un numero finito di elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di **A**.

Sia δ il più piccolo tra i numeri

$$| \, x_1 - x_0 \, | \, , \; | \, x_2 - x_0 \, | \, , \ldots , \; | \, x_n - x_0 \, | \; ;$$

si ha $\delta \neq 0$.

Ognuno degli x_i (e quindi, a maggior ragione, ogni elemento di **A**) ha distanza da x_0 maggiore di $\frac{\delta}{2}$; dunque all'intorno forato di centro x_0 e raggio $\frac{\delta}{2}$ non appartiene alcun elemento di **A**, contro l'ipotesi che x_0 sia di accumulazione per **A**.

Teorema 15.6.14

Sia $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$. Ogni punto interno ad $\mathbf{A}$ è un punto di accumulazione per $\mathbf{A}$.

Dimostrazione – Sia x_0 un punto interno ad $\mathbf{A}$; esistono allora $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1 < x_0 < x_2 \qquad \text{e} \qquad (x_1, x_2) \subset \mathbf{A}\,.$$

Sia $\mathbf{J}_0$ un intorno forato di x_0; esistono dunque $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$y_1 < x_0 < y_2 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{J}_0 = (y_1, y_2)\backslash\{x_0\}.$$

Poniamo $z_1 := \mathbf{max}\,\{x_1, y_1\}$ e $z_2 := \mathbf{min}\,\{x_2, y_2\}$.

Allora $z_1 < x_0 < z_2$; dunque in $(z_1, z_2)\backslash\{x_0\}$ esistono infiniti elementi, e tutti questi appartengono ad $\mathbf{A}$ (perché $(z_1, z_2) \subset (x_1, x_2) \subset \mathbf{A}$); d'altro lato, $(z_1, z_2)\backslash\{x_0\} \subset \mathbf{J}_0$, e dunque a $\mathbf{J}_0$ appartengono infiniti elementi di $\mathbf{A}$.

Per l'arbitrarietà di $\mathbf{J}_0$, l'asserto è completamente provato.

15.7 - Punti isolati.

Sia $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathbf{A}$. Si dice che x_0 è un *punto isolato* (di $\mathbf{A}$) se esiste un intorno forato di x_0 al quale non appartiene alcun elemento di $\mathbf{A}$.

Esempi

15.7.1 Ogni elemento di $\mathbb{N}$ è un punto isolato.

15.7.2 Sia $\mathbf{A} := \{1\} \cup (2, 3)$. L'elemento 1 è un punto isolato di $\mathbf{A}$; tutti gli elementi dell'intervallo aperto $(2, 3)$ sono punti di accumulazione per $\mathbf{A}$ che appartengono ad $\mathbf{A}$; gli elementi 2 e 3 sono punti di accumulazione per $\mathbf{A}$ che non appartengono ad $\mathbf{A}$.

Esercizio [*] 15.7.3

Sia $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathbf{A}$. Si dimostri che x_0 è un punto isolato di $\mathbf{A}$ se e soltanto se non è un punto di accumulazione per $\mathbf{A}$.

Suggerimento: Si utilizzi il contenuto delle osservazioni 2.3.6 e 2.3.7 .

16.- CONTINUITÀ

16.1 - Definizione.

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0\in\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che **f** è *continua in* x_0 se

$$(\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists\,\delta\in\mathbb{R}^+)((x\in\mathcal{D}(\mathbf{f}))\wedge(\,|\,x-x_0\,|\,<\delta))\ \Rightarrow\ (\,|\,\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0)\,|\,<\varepsilon)$$

ossia (cfr. Corollario 15.2.2) se

$$(\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists\,\delta\in\mathbb{R}^+)((x\in\mathcal{D}(\mathbf{f})\cap(x_0-\delta,\ x_0+\delta))\ \Rightarrow\ \mathbf{f}(x)\in(\mathbf{f}(x_0)-\varepsilon,\ \mathbf{f}(x_0)+\varepsilon)).$$

Osservazione 16.1.1

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0\in\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si noti che, in base alla definizione, se x_0 è un punto isolato per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ (cfr. sez. 15.7) allora sicuramente **f** è continua in x_0. Infatti, se x_0 è un punto isolato per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ esiste un intorno di x_0 al quale non appartiene nessun altro punto di $\mathcal{D}(\mathbf{f})$, e si può scegliere δ (indipendentemente da ε) in modo che $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ sia contenuto in tale intorno e quindi le due condizioni $x\in\mathcal{D}(\mathbf{f})$, $|\,x-x_0\,|\,<\delta$ siano verificate entrambe solo per $x=x_0$. Di conseguenza, saremo interessati a studiare la continuità solo nei punti di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione, e sia **I** un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che **f** è *continua in* **I** se è continua in ogni punto di **I**. Se **f** è continua in ogni punto del proprio dominio, si dice semplicemente che **f** è *continua*.

Sia **I** un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Indicheremo con $\mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{I})$ l'insieme delle funzioni $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue in **I**. Se $\mathbf{I}=\{x_0\}$, scriveremo $\mathcal{C}^{(0)}(x_0)$ anziché $\mathcal{C}^{(0)}(\{x_0\})$.

Esempio 16.1.2

Sia $\alpha\in\mathbb{R}$. La funzione ("costante") che ad ogni numero reale associa α è continua in $\mathbb{R}$.

Esempio 16.1.3

La funzione $[x]$ è continua in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Esempio 16.1.4

La funzione $\mathbf{id}_{\mathbb{R}}$ che ad ogni numero reale associa se stesso è continua in $\mathbb{R}$. Poiché si ha $\mathbf{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, tale funzione è la funzione polinomiale associata al polinomio x e si indica usualmente essa stessa con x.

Esempio 16.1.5

La funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo
$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$
è continua in 0 (e solo in 0).

Teorema 16.1.6

Le funzioni $\mathbf{sin}(x)$ e $\mathbf{cos}(x)$ sono continue.

Dimostrazione – Proviamo che $\mathbf{sin}(x)$ è continua; analogamente si prova che è continua $\mathbf{cos}(x)$.

Si ponga $h := x - x_0$, cosicché $x = x_0 + h$. Si ha
$$\mathbf{sin}(x) - \mathbf{sin}(x_0) = \mathbf{sin}(x_0 + h) - \mathbf{sin}(x_0) = \mathbf{sin}(x_0)\mathbf{cos}(h) + \mathbf{cos}(x_0)\mathbf{sin}(h) - \mathbf{sin}(x_0) =$$
$$= \mathbf{sin}(x_0)(\mathbf{cos}(h) - 1) + \mathbf{cos}(x_0)\mathbf{sin}(h)$$
e quindi (ricordando i teoremi 15.2.3 e 15.2.4, e tenendo conto di risultati elementari sulle funzioni **sin** e **cos** ([25]))
$$|\,\mathbf{sin}(x) - \mathbf{sin}(x_0)\,| \le |\,\mathbf{sin}(x_0)\,| \cdot |\,\mathbf{cos}(h) - 1\,| + |\,\mathbf{cos}(x_0)\,| \cdot |\,\mathbf{sin}(h)\,| =$$
$$= 2\,|\,\mathbf{sin}(x_0)\,|\,\mathbf{sin}^2(\tfrac{h}{2}) + |\,\mathbf{cos}(x_0)\,| \cdot |\,\mathbf{sin}(h)\,| \le |\,\mathbf{sin}(x_0)\,|\,\frac{h^2}{2} + |\,\mathbf{cos}(x_0)\,| \cdot |\,h\,|\,.$$
Se inoltre $|\,h\,| < 1$, è anche $h^2 < |\,h\,|$; si ha allora
$$|\,\mathbf{sin}(x_0)\,|\,\frac{h^2}{2} + |\,\mathbf{cos}(x_0)\,| \cdot |\,h\,| < |\,h\,| \cdot \left(\frac{|\mathbf{sin}(x_0)|}{2} + |\,\mathbf{cos}(x_0)\,|\,\right) \le \frac{3}{2}\,|\,h\,|$$
perché $|\,\mathbf{sin}(x_0)\,| \le 1$ e $|\,\mathbf{cos}(x_0)\,| \le 1$.

Pertanto, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se si pone $\delta := \mathbf{min}\,\{\frac{2\varepsilon}{3}, 1\}$ si ha che
$$|\,x - x_0\,| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\,h\,| < \frac{2\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{3|h|}{2} < \varepsilon \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |\,\mathbf{sin}(x) - \mathbf{sin}(x_0)\,| \le |\,\mathbf{sin}(x_0)\,|\,\frac{h^2}{2} + |\,\mathbf{cos}(x_0)\,| \cdot |\,h\,| < \frac{3|h|}{2} < \varepsilon$$
da cui l'asserto.

[25] Precisamente: che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $|\,\mathbf{sin}(x)\,| \le |\,x\,|$; e che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $1 - \mathbf{cos}(x) = 2\mathbf{sin}^2(\frac{x}{2})$.

Teorema 16.1.7

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione x^α è continua. Per ogni $a \in \mathbb{R}^+$, la funzione $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{a}}(x)$ è continua.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esercizio 16.1.8

Dimostrare che la funzione $|x|$ (cfr. 10.1) è continua.

16.2 - Prime proprietà delle funzioni continue.

Teorema 16.2.1

Sia $\mathbf{f}$ una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$, esiste un intorno di x_0 in cui $\mathbf{f}$ è limitata.

Dimostrazione — Poiché $\mathbf{f}$ è continua in x_0, fissato $\varepsilon := 1$ esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) \in (\mathbf{f}(x_0) - 1,\ \mathbf{f}(x_0) + 1)$$

e dunque in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\mathbf{f}$ è limitata.

Teorema 16.2.2 (Weierstrass)

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}([a, b])$. Allora $\mathbf{f}$ è limitata in $[a, b]$.

Dimostrazione — Poniamo

$$\mathbf{X} := \{x \in [a, b] \ / \ \mathbf{f} \text{ non è limitata in } [a, x]\}.$$

È $\mathbf{X} = \emptyset$ se e soltanto se vale il teorema. Procediamo per assurdo, e supponiamo che sia $\mathbf{X} \neq \emptyset$; poiché $\mathbf{X}$ è inferiormente limitato (da a) esiste, per la completezza di $\mathbb{R}$, l'estremo inferiore di $\mathbf{X}$. Poniamo $x_0 := \mathbf{inf}\, \mathbf{X}$.
Osserviamo che

16.2.P1 per ogni $\overline{x} \in (a, x_0)$, $\mathbf{f}$ è limitata in $[a, \overline{x}]$

(infatti se $\mathbf{f}$ non fosse limitata in $[a, \overline{x}]$ sarebbe $\overline{x} \in \mathbf{X}$ e x_0 non potrebbe essere l'estremo inferiore di $\mathbf{X}$) e

16.2.P2 per ogni $x_1 \in (x_0, b)$, $\mathbf{f}$ non è limitata in $[a, x_1]$

(infatti se $\mathbf{f}$ fosse limitata in $[a, x_1]$ sarebbe $[x_0, x_1] \cap \mathbf{X} = \emptyset$, e x_0 non potrebbe essere l'estremo inferiore di $\mathbf{X}$).

Per il teorema 16.2.1, esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 in cui $\mathbf{f}$ è limitata; scegliamo δ in modo che tale intorno sia contenuto in $[a, b]$. Poiché $\mathbf{f}$ è limitata anche in $[a, x_0 - \delta]$ (per la 16.2.P1), per il teorema 15.5.1 $\mathbf{f}$ è limitata in $[a,\ x_0 + \delta)$ e quindi in $[a, x_0 + \frac{\delta}{2}]$; ciò contraddice la 16.2.P2 e prova l'asserto.

Teorema 16.2.3 ("della permanenza del segno")

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$. Se $\mathbf{f}(x_0) \neq 0$, esiste un intorno di x_0 nel quale $\mathbf{f}$ ha lo stesso segno di $\mathbf{f}(x_0)$.

Dimostrazione — Supponiamo, per fissare le idee, $\mathbf{f}(x_0) > 0$. Posto $\varepsilon := \mathbf{f}(x_0)$, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \ \Rightarrow\ \mathbf{f}(x) \in (\mathbf{f}(x_0) - \varepsilon,\ \mathbf{f}(x_0) + \varepsilon)$

ossia $$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \ \Rightarrow\ \mathbf{f}(x) \in (0,\ 2\mathbf{f}(x_0)).$$

In particolare, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è un intorno di x_0 nel quale $\mathbf{f}(x)$ è positiva.

Se invece $\mathbf{f}(x_0) < 0$, si pone $\varepsilon := -\mathbf{f}(x_0)$ e si procede in modo analogo.

Teorema 16.2.4 (Bolzano)

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}([a, b])$. Se $\mathbf{f}(a)$ e $\mathbf{f}(b)$ hanno segno opposto, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $\mathbf{f}(x_0) = 0$.

Dimostrazione — Supponiamo, per fissare le idee, $\mathbf{f}(a) < 0$. Posto
$$\mathbf{X} := \{x \in [a, b] \ /\ \mathbf{f}(x) < 0\}$$
si ha che $\mathbf{X} \neq \emptyset$ (perché $a \in \mathbf{X}$) e $\mathbf{X}$ è superiormente limitato (ad esempio da b, essendo $\mathbf{X} \subset [a, b]$); pertanto esiste $x_0 := \sup \mathbf{X}$.
È $a \leq x_0$ (perchè $a \in \mathbf{X}$) e $x_0 \leq b$ (perché b è una limitazione superiore per $\mathbf{X}$), ossia $x_0 \in [a, b]$. Vogliamo provare che $\mathbf{f}(x_0) = 0$ (da cui seguirà anche che $x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$, cosicché $x_0 \in (a, b)$).
Se fosse $\mathbf{f}(x_0) < 0$, per il teorema della permanenza del segno (16.2.3) esisterebbe un intorno (x_1, x_2) di x_0 contenuto in $[a, b]$ ([26]) nel quale $\mathbf{f}$ assume solo valori negativi; in particolare, sarebbe $(x_0, x_2) \subset \mathbf{X}$, assurdo perché $x_0 = \sup \mathbf{X}$. Se fosse $\mathbf{f}(x_0) > 0$, ancora per il teorema 16.2.3 esisterebbe un intorno (x_1, x_2) di x_0 nel quale $\mathbf{f}$ assume solo valori positivi; dovrebbe essere $x < x_1$ per ogni $x \in \mathbf{X}$ ([27]), e dunque x_1 sarebbe una limitazione superiore di $\mathbf{X}$ minore di x_0, assurdo perché $x_0 = \sup \mathbf{X}$. Dunque $\mathbf{f}(x_0) = 0$, come si voleva.

Esempio 16.2.5

Sia $\mathbf{f}(x) := 2^x - x^3$; proveremo più avanti (16.3.2; cfr. il teorema 16.1.7) che $\mathbf{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Si ha $\mathbf{f}(1) = 1$, $\mathbf{f}(2) = -4$; per il teorema di Bolzano (16.2.4) esiste $x_0 \in (1, 2)$ tale che $\mathbf{f}(x_0) = 0$. In altri termini, l'equazione $2^x = x^3$ ha una soluzione nell'intervallo $(1, 2)$.

---

[26] Conviene applicare il teorema 16.2.3 non a $\mathbf{f}$ ma alla restrizione di $\mathbf{f}$ ad $[a, b]$.

[27] Non può essere $x \geq x_2$, perché sarebbe anche $x > x_0$; né può essere $x \in (x_1, x_2)$ perché in (x_1, x_2) $\mathbf{f}$ assume solo valori positivi.

16.3 - Proprietà algebriche di $\mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{I})$.

Teorema 16.3.1

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. $\mathcal{C}^{(0)}(x_0)$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

Dimostrazione — Siano $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$. Per ogni $\eta \in \mathbb{R}^+$, esistono $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \quad \Rightarrow \quad |\, \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0) \,| < \eta$$

e
$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{g}) \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \quad \Rightarrow \quad |\, \mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(x_0) \,| < \eta.$$

Proviamo in primo luogo che $\mathbf{f} + \mathbf{g} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$. Posto $\delta := \mathbf{min}\{\delta_1, \delta_2\}$, è chiaro che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$.
Allora (ricordando che $\mathcal{D}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{g})$ e tenendo presente il teorema 15.2.3) se $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è anche

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{g}) \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$$

e dunque
$$|\, (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) - (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x_0) \,| = |\, \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) - \mathbf{f}(x_0) - \mathbf{g}(x_0) \,| \leq$$
$$\leq |\, \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0) \,| + |\, \mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(x_0) \,| < \eta + \eta = 2\eta.$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si può scegliere η in modo che sia $2\eta < \varepsilon$; per δ dipendente da tale η, si ha

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |\, (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) - (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x_0) \,| < \varepsilon$$

come si voleva.

Proviamo ora che $\mathbf{fg} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$. Per il teorema 16.2.1, esistono $\delta_3, \alpha \in \mathbb{R}^+$ tali che

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3) \quad \Rightarrow \quad |\, \mathbf{f}(x) \,| < \alpha.$$

Posto $\delta := \mathbf{min}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, per $x \in \mathcal{D}(\mathbf{fg}) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha (ricordando i teoremi 15.2.3 e 15.2.4):

$$|\, (\mathbf{fg})(x) - (\mathbf{fg})(x_0) \,| = |\, \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x) - \mathbf{f}(x_0)\mathbf{g}(x_0) \,| = |\, \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x) - \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x_0) + \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x_0) - \mathbf{f}(x_0)\mathbf{g}(x_0) \,| \leq$$

$$\leq |\, \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x) - \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x_0) \,| + |\, \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x_0) - \mathbf{f}(x_0)\mathbf{g}(x_0) \,| =$$
$$= |\, \mathbf{f}(x) \,| \cdot |\, \mathbf{g}(x) - \mathbf{g}(x_0) \,| + |\, \mathbf{g}(x_0) \,| \cdot |\, \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0) \,| \leq \alpha\eta + |\, \mathbf{g}(x_0) \,| \eta = \eta(\alpha + |\, \mathbf{g}(x_0) \,|).$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si può scegliere η in modo che sia $\eta(\alpha + |\, \mathbf{g}(x_0) \,|) < \varepsilon$; per δ dipendente da tale η, si ha

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{fg}) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |\, (\mathbf{fg})(x) - (\mathbf{fg})(x_0) \,| \leq \eta(\alpha + |\, \mathbf{g}(x_0) \,|) < \varepsilon$$

come si voleva, cosicché l'asserto è completamente provato.

Corollario 16.3.2

Sia $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{I})$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

Corollario 16.3.3

Le funzioni polinomiali sono continue.

Dimostrazione — Segue subito dal teorema 16.3.1 e dagli esempi 16.1.2 e 16.1.4.

Teorema 16.3.4

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se **f**, **g** $\in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$ e $\mathbf{g}(x_0) \neq 0$ (cosicché $x_0 \in \mathcal{D}(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}})$), si ha $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Corollario 16.3.5

Sia $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$. Se **f**, **g** $\in \mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{I})$ e $\mathbf{g}(x_0) \neq 0$ in **I** (cosicché $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}})$), si ha $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{I})$.

Corollario 16.3.6

Le funzioni della forma $\frac{\mathbf{p}(x)}{\mathbf{q}(x)}$ con $\mathbf{p}(x)$, $\mathbf{q}(x)$ funzioni polinomiali (dette *funzioni razionali*) sono continue ovunque sono definite, cioè in ogni x tale che $\mathbf{q}(x) \neq 0$.

Corollario 16.3.7

La funzione $\mathbf{tg}(x)$ è continua.

Teorema 16.3.8

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e sia $\mathbf{f}(x_0) \in \mathcal{D}(\mathbf{g})$. Se **f** è continua in x_0 e **g** è continua in $\mathbf{f}(x_0)$, la funzione composta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ è continua in x_0.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 16.3.9

Sia **I** un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{I})$. Se **f** è invertibile, $\mathbf{f}^{-1} \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{f}(\mathbf{I}))$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Corollario 16.3.10

Per ogni $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, la funzione $\mathbf{log}_a(x)$ è continua.

Corollario 16.3.11

Le funzioni $\mathbf{arcsin}(x)$, $\mathbf{arccos}(x)$ e $\mathbf{arctg}(x)$ sono continue.

Esempio 16.3.12

Mostriamo che è essenziale in 16.3.9 l'ipotesi che la funzione considerata abbia per dominio un intervallo.
La funzione $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$ ponendo

$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} x+1 & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

è continua ed invertibile. La sua inversa (che ha per dominio tutto $\mathbb{R}$) è la funzione

$$\mathbf{f}^{-1}(x) := \begin{cases} x-1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

che **non** è continua in 0.

Teorema 16.3.13

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$ e $\mathbf{f}(x_0) > 0$ (cosicché $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f}^{\mathbf{g}})$), si ha $\mathbf{f}^{\mathbf{g}} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$.

Dimostrazione — Per ogni $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}^{\mathbf{g}})$ si ha

$$(\mathbf{f}^{\mathbf{g}})(x) = 2^{\mathbf{g}(x)\mathbf{log}_2(\mathbf{f}(x))} = \mathbf{exp}_2(\mathbf{g}(x)\mathbf{log}_2(\mathbf{f}(x))).$$

Dunque $\mathbf{f}^{\mathbf{g}}$ è continua in x_0 per i teoremi 16.3.8, 16.3.10, 16.3.1 e 16.1.7.

16.4 - Ulteriori proprietà delle funzioni continue.

Teorema 16.4.1 (Darboux)

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}([a, b])$. Per ogni numero reale y_0 compreso tra $\mathbf{f}(a)$ e $\mathbf{f}(b)$, esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $\mathbf{f}(x_0) = y_0$.

Dimostrazione — La funzione$\mathbf{g}(x) := \mathbf{f}(x) - y_0$

è continua in $[a, b]$ (esempio 16.1.2 e teorema 16.3.1); inoltre (essendo per ipotesi $\mathbf{f}(a) < y_0 < \mathbf{f}(b)$ oppure $\mathbf{f}(b) < y_0 < \mathbf{f}(a)$) $\mathbf{g}(a)$ e $\mathbf{g}(b)$ hanno segno opposto. Per il teorema di Bolzano (16.2.4), esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$0 = \mathbf{g}(x_0) = \mathbf{f}(x_0) - y_0$$

ossia tale che $\mathbf{f}(x_0) = y_0$, come si voleva.

Teorema 16.4.2 (Weierstrass)

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}([a, b])$. Allora **f** ha massimo e minimo in $[a, b]$ e per ogni numero reale y_0 compreso tra il minimo e il massimo di **f** in $[a, b]$ esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $\mathbf{f}(x_0) = y_0$.

Dimostrazione — Per il teorema 16.2.2, **f** è limitata in $[a, b]$ e quindi ha in $[a, b]$ un estremo inferiore α e un estremo superiore β.

Proviamo che esiste un punto dell'intervallo $[a, b]$ nel quale il valore della **f** è proprio α (cioè che α è il minimo di **f** in $[a, b]$). Procediamo per assurdo, supponendo che sia $\mathbf{f}(x) \neq \alpha$ per ogni $x \in [a, b]$. La funzione $\mathbf{g}_1(x) := \mathbf{f}(x) - \alpha$
non assume allora mai il valore zero nell'intervallo $[a, b]$, e dunque per il teorema 16.3.4 la funzione
$$\mathbf{g}(x) := \frac{1}{\mathbf{g}_1(x)} = \frac{1}{\mathbf{f}(x)-\alpha}$$
è continua in $[a, b]$. Per il teorema 16.2.2, **g** è limitata in $[a, b]$, e dunque esiste l'estremo superiore λ di **g** in $[a, b]$. Si ha cioè per ogni $x \in [a, b]$
$$\frac{1}{\mathbf{f}(x)-\alpha} \leq \lambda$$
da cui (ricordando che $\mathbf{f}(x) - \alpha > 0$, e quindi $\lambda > 0$)
$$\mathbf{f}(x) - \alpha \geq \frac{1}{\lambda}$$
e infine
$$\mathbf{f}(x) \geq \alpha + \frac{1}{\lambda}$$
con $\alpha + \frac{1}{\lambda} > \alpha$ perché $\lambda > 0$.

Si è così trovata per **f** in $[a, b]$ una limitazione inferiore maggiore di α, e ciò è assurdo perché α è per ipotesi la massima limitazione inferiore per **f** in $[a, b]$. Questa contraddizione prova che deve essere $\mathbf{f}(x) = \alpha$ per almeno un $x \in [a, b]$, cioè che **f** ha minimo in $[a, b]$.

Ponendo $\mathbf{g}(x) := \frac{1}{\beta-\mathbf{f}(x)}$ e ragionando come sopra, si prova anche che β è il massimo di **f** in $[a, b]$.

Siano allora $x_1,\ x_2 \in [a, b]$ tali che $\mathbf{f}(x_1) = \alpha$, $\mathbf{f}(x_2) = \beta$; l'ultima parte dell'asserto segue subito dal teorema di Darboux (16.4.1) applicato alla restrizione di **f** all'intervallo di estremi x_1 e x_2.

16.5 - Singolarità. Prolungamento per continuità.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che **f** *presenta una singolarità in* x_0 se

(a) $\quad x_0 \notin \mathcal{D}(\mathbf{f})$

oppure

(b) $\quad x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e **f** non è continua in x_0.

Esempio 16.5.1

La funzione $\frac{x^2-1}{x+1}$ presenta una singolarità in -1.

Esempio 16.5.2

La funzione $\frac{\mathbf{sin}(x)}{x}$ presenta una singolarità in 0.

Esempio 16.5.3

La funzione $[x]$ presenta singolarità in $-1, 0, 1$ e in ogni numero intero.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ ([28]). Si dice che **f** è *prolungabile per continuità in* x_0 se esiste una funzione $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $\mathcal{D}(\mathbf{g}) = \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cup \{x_0\}$;

(ii) $\mathbf{g}(x) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \backslash \{x_0\}$;

(iii) **g** è continua in x_0 .

Una funzione $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le (i), (ii) e (iii) si dice che *prolunga per continuità in* x_0 la **f**.

Se **f** presenta una singolarità in x_0, si dice che tale singolarità è *eliminabile* (*ponendo* $\mathbf{f}(x_0) := \lambda$) se esiste una funzione **g** che prolunga per continuità in x_0 la **f** (e $\mathbf{g}(x_0) = \lambda$).

Esempio 16.5.4

Sia $\mathbf{f}(x) := \frac{x^2-1}{x+1}$ (cfr. esempio 16.5.1). La funzione $x-1$ prolunga per continuità (in -1) la **f**; in altri termini, **f** presenta in -1 una singolarità eliminabile ponendo $\mathbf{f}(-1) := -2$.

[28] Ricordiamo che può indifferentemente essere $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ oppure $x_0 \notin \mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Teorema 16.5.5

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Esiste al più una funzione che prolunga per continuità in x_0 la **f**.

Dimostrazione — Siano $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ due funzioni che prolungano per continuità in x_0 la **f**; allora $\mathbf{f}_1(x) = \mathbf{f}_2(x)$ per ogni $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \setminus \{x_0\}$, quindi basta dimostrare che $\mathbf{f}_1(x_0) = \mathbf{f}_2(x_0)$.

Procediamo per assurdo, e supponiamo $\mathbf{f}_1(x_0) \neq \mathbf{f}_2(x_0)$.

Scelto
$$\varepsilon := \frac{|\mathbf{f}_1(x_0) - \mathbf{f}_2(x_0)|}{2},$$
poiché $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ sono continue in x_0 esistono $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che
$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}_1) \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \quad \Rightarrow \quad |\, \mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_1(x_0) \,| < \eta$$
e
$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}_2) \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \quad \Rightarrow \quad |\, \mathbf{f}_2(x) - \mathbf{f}_2(x_0) \,| < \eta.$$
Posto $\delta := \min \{\delta_1, \delta_2\}$, poiché x_0 è un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$, esiste $\overline{x} \neq x_0$ in $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Deve essere allora
$$|\, \mathbf{f}_1(x_0) - \mathbf{f}_2(x_0) \,| = |\, \mathbf{f}_1(x_0) - \mathbf{f}(\overline{x}) + \mathbf{f}(\overline{x}) - \mathbf{f}_2(x_0) \,| =$$
$$= |\, \mathbf{f}_1(x_0) - \mathbf{f}_1(\overline{x}) + \mathbf{f}_2(\overline{x}) - \mathbf{f}_2(x_0) \,| \leq$$
$$\leq |\, \mathbf{f}_1(x_0) - \mathbf{f}_1(\overline{x}) \,| + |\, \mathbf{f}_2(\overline{x}) - \mathbf{f}_2(x_0) \,| \leq \varepsilon + \varepsilon < |\, \mathbf{f}_1(x_0) - \mathbf{f}_2(x_0) \,|$$
e ciò è assurdo, come si voleva.

Teorema 16.5.6

Sia $\mathbf{f}(x) := \dfrac{\mathbf{sin}(x)}{x}$ (cfr. esempio 16.5.2). La singolarità di $\mathbf{f}(x)$ in 0 è eliminabile ponendo $\mathbf{f}(0) := 1$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

17.- LIMITI

17.1 - Definizione.

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Sia $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si dice che λ è il *limite di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a* x_0 e si scrive
$$\lim_{x\to x_0}\mathbf{f}(x)=\lambda$$
se $\mathbf{f}$ può essere prolungata in x_0 per continuità ponendo $\mathbf{f}(x_0):=\lambda$, ossia se la funzione $\mathbf{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\mathbf{g}(x):=\begin{cases}\mathbf{f}(x) & \text{se } x\neq x_0\\ \lambda & \text{se } x=x_0\end{cases}$$
è continua in x_0.

Dunque, $\lim_{x\to x_0}\mathbf{f}(x)=\lambda$ se e solo se si verifica una delle seguenti due situazioni:

(i) $\mathbf{f}$ è continua in x_0, e $\mathbf{f}(x_0)=\lambda$;

oppure

(ii) $\mathbf{f}$ presenta in x_0 una singolarità che può essere eliminata ponendo $\mathbf{f}(x_0):=\lambda$.

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se $\mathbf{f}$ può essere prolungata per continuità in x_0 si usa dire che *esiste ed è finito il limite di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a* x_0. La nozione di "limite infinito" (alla quale questo modo di esprimersi fa riferimento in contrapposizione) sarà introdotta nella sez. 17.5.

Osservazione 17.1.1

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0\in\mathcal{D}(\mathbf{f})$ un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. La funzione $\mathbf{f}$ è continua in x_0 se e solo se
$$\lim_{x\to x_0}\mathbf{f}(x)=\mathbf{f}(x_0).$$

Esempi

17.1.2 Sia $\mathbf{p}(x)\in\mathbb{R}[x]$. Per ogni $x_0\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0}\mathbf{p}(x)=\mathbf{p}(x_0)$. In particolare:

per ogni $x_0\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0}x=x_0$;

se $\lambda\in\mathbb{R}$, per ogni $x_0\in\mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to x_0}\lambda=\lambda$.

17.1.3 Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{sin}(x) = \mathbf{sin}(x_0);$$
$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{cos}(x) = \mathbf{cos}(x_0);$$
e, se $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,
$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{tg}(x) = \mathbf{tg}(x_0).$$

17.1.4 $$\lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{sin}(x)}{x} = 1 \text{ (cfr. teorema 16.5.6);}$$

17.1.5 $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2;$$

17.1.6 $$\lim_{x \to 1} [x] \text{ non esiste;}$$

17.1.7 $$\lim_{x \to 0} \mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste;}$$

Teorema 17.1.8

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia
$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \lambda$$
è che per ogni intorno $\mathbf{I}_\varepsilon$ di centro λ (individuato da ε, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$) esista un intorno $\mathbf{J}_\delta$ di centro x_0 (individuato da δ, con $\delta \in \mathbb{R}^+$) tale che
$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathbf{J}_\delta \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) \in \mathbf{I}_\varepsilon.$$

Dimostrazione — Si tratta di una conseguenza pressoché immediata delle definizioni di limite e di continuità; lo studente è invitato a sviluppare la dimostrazione nei dettagli quale utile esercizio [*].

Teorema 17.1.9 ("della permanenza del segno")

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

Se
$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \lambda$$
esiste un intorno forato di x_0 nel quale $\mathbf{f}$ ha lo stesso segno di λ.

Dimostrazione — Si tratta di una riformulazione del teorema 16.2.3.

17.2 - Limite destro, limite sinistro.

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0, +\infty)$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si dice che λ è il *limite di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a* x_0 *da destra* (o, anche, che λ è il *limite destro di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a* x_0) e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^+} \mathbf{f}(x) = \lambda$$

se λ è il limite per x che tende a x_0 della restrizione di $\mathbf{f}$ a $(x_0, +\infty)$.

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (-\infty, x_0)$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si dice che λ è il *limite di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a* x_0 *da sinistra* (o, anche, che λ è il *limite sinistro di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a* x_0) e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^-} \mathbf{f}(x) = \lambda$$

se λ è il limite per x che tende a x_0 della restrizione di $\mathbf{f}$ a $(-\infty, x_0)$.

Esempi

17.2.1 $$\lim_{x \to 1^-} [x] = 0; \quad \lim_{x \to 1^+} [x] = 1.$$

17.2.2 non esiste né $\lim_{x \to 0^-} \mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right)$ né $\lim_{x \to 0^+} \mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se x_0 è punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0, +\infty)$ ma non per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (-\infty, x_0)$, è sempre preferibile scrivere

$$\lim_{x \to x_0^+} \mathbf{f}(x) \qquad \text{anziché} \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x).$$

Analogamente, se x_0 è punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (-\infty, x_0)$ ma non per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0, +\infty)$, si usa scrivere

$$\lim_{x \to x_0^-} \mathbf{f}(x) \qquad \text{anziché} \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x).$$

Esempio 17.2.3 $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = 0.$$

Teorema 17.2.4

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se x_0 è un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (-\infty, x_0)$ e per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0, +\infty)$, allora condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \lambda$$

è che sia

$$\lim_{x \to x_0^-} \mathbf{f}(x) = \lambda \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0^+} \mathbf{f}(x) = \lambda.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

17.3 - Operazioni in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e limiti.

È naturale chiedersi quali legami esistano tra operazioni in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e limiti. Importanti risultati (teorema 17.3.1 e teorema 17.3.4) seguono dai teoremi della sezione 16.3.

Teorema 17.3.1

Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{g})$. Sia

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = F \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = G \qquad \text{con } F, G \in \mathbb{R}.$$

Allora

(i) $$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = F + G;$$

(ii) $$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{fg})(x) = FG;$$

(iii) $$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)(x) = \frac{F}{G} \quad \text{(purché sia } G \neq 0).$$

Dimostrazione — Segue immediatamente dai teoremi 16.3.1 e 16.3.4.

Teorema 17.3.2

Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{g})$. Se

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = 0$$

e $\mathbf{g}$ è limitata in un intorno di x_0, allora è anche

$$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{fg})(x) = 0.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempio 17.3.3

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Teorema 17.3.4 ("del cambiamento di variabile")

Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{y}$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{y})$ e sia

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{y}(x) = y_0 \qquad \text{con } y_0 \in \mathbb{R}.$$

Supponiamo inoltre che valga una almeno delle seguenti due condizioni:

(a) esiste un intorno $\mathbf{I}$ di x_0 tale che $\quad \mathbf{y}(x) \neq y_0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{y}) \cap \mathbf{I} \setminus \{x_0\}$;

oppure

(b) $\mathbf{f}$ è continua in y_0.

Se

— y_0 è punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ (come certamente accade se vale la (a)) e si ha

$$\lim_{y \to y_0} \mathbf{f}(y) = \lambda \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

oppure

— y_0 è punto isolato per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ (cfr. sez. 15.7) e si ha $\quad \mathbf{f}(y_0) = \lambda \quad$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{f}(\mathbf{y}(x)) = \lambda.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempi

17.3.5
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sin}(2x)}{2x} = 1$$

17.3.6
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sin}(\mathbf{sin}(x))}{\mathbf{sin}(x)} = 1$$

17.3.7
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sin}(\frac{x}{2})}{x} = \frac{1}{2}$$

17.3.8
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sin}(\mathbf{sin}(x))}{x} = 1$$

Esempio 17.3.9

Sia $\mathbf{y}(x) := 0$ (funzione costante)
e sia
$$\mathbf{f}(y) := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 2 & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$$
In questo caso,
$$\lim_{x\to 0} \mathbf{y}(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to 0} \mathbf{f}(y) = 1$$
ma $\mathbf{f} \circ \mathbf{y}$ è la funzione costante uguale a 2, cosicché
$$\lim_{x\to x_0} (\mathbf{f} \circ \mathbf{y})(x) = 2\ .$$

Osservazione 17.3.10

Nella situazione del teorema 17.3.4, se $y_0 \notin \mathcal{D}(\mathbf{f})$ allora per ogni $x \in \mathcal{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{y})$ deve essere $\mathbf{y}(x) \neq y_0$; dunque vale la (a) e il teorema può essere utilizzato per calcolare
$$\lim_{x\to x_0} (\mathbf{f} \circ \mathbf{y})(x).$$
In sostanza, il teorema 17.3.4 può essere certamente utilizzato ogni volta che

(i) $\quad y_0 \notin \mathcal{D}(\mathbf{f})$

oppure

(ii) $\quad y_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e $\mathbf{f}$ è continua in y_0.

Osservazione 17.3.11

L'uso combinato dei teoremi 17.3.1 e 17.3.4 consente in molti casi il calcolo del

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\mathbf{f}(x)\Big)^{\mathbf{g}(x)} .$$

Infatti si ha $\Big(\mathbf{f}(x)\Big)^{\mathbf{g}(x)} = a^{\mathbf{g}(x)\cdot\mathbf{log}_a(\mathbf{f}(x))}$ per ogni $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$; inoltre, poiché le funzioni $\mathbf{exp}_a$ e $\mathbf{log}_a$ sono continue (teorema 16.1.7 e corollario 16.3.10), è certamente verificata una delle due condizioni (i), (ii) dell'osservazione 17.3.10.

Esempio 17.3.12

$$\lim_{x\to 0}(x+2)^{x\cdot\mathbf{sin}(\frac{1}{x})} = 1$$

17.4 - Limiti notevoli (e altri limiti) che coinvolgono funzioni trigonometriche.

17.4.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathbf{cos}(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathbf{cos}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\mathbf{cos}(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\mathbf{cos}(x)}{1+\mathbf{cos}(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\mathbf{cos}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\mathbf{cos}(x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathbf{sin}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\mathbf{cos}(x)}\right) = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{sin}(x)}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\mathbf{cos}(x)} = \frac{1}{2}.$$

17.4.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{tg}(x)}{x} = 1$$

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{sin}(x)}{x}\cdot\frac{1}{\mathbf{cos}(x)} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1$$

17.4.3
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathbf{cos}(2x)}{x^2}=2$$

Dimostrazione — Riconducendoci al limite 17.4.1, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathbf{cos}(2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}4\cdot\frac{1-\mathbf{cos}(2x)}{(2x)^2}=4\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1-\mathbf{cos}(y)}{y^2}=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

avendo posto $y:=2x$ in applicazione del teorema del cambiamento di variabile (17.3.4).

17.4.4
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{tg}(x)-\mathbf{sin}(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{tg}(x)-\mathbf{sin}(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)}-\mathbf{sin}(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{sin}(x)\left(\frac{1}{\mathbf{cos}(x)}-1\right)}{x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{sin}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\mathbf{cos}(x)}{\mathbf{cos}(x)}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{sin}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathbf{cos}(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\mathbf{cos}(x)}=\frac{1}{2}$$

17.4.5
$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\cdot\mathbf{sin}(x-1)=2$$

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\cdot\mathbf{sin}(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\cdot\mathbf{sin}(x-1)=\lim_{x\to 1}(x+1)\cdot\frac{\mathbf{sin}(x-1)}{x-1}=2.$$

17.5 - Limiti infiniti.

Particolare interesse riveste lo studio dell'andamento della funzione quoziente $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ quando $\lim_{x\to x_0}\mathbf{f}(x)=F\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\lim_{x\to x_0}\mathbf{g}(x)=0$.

Nel caso, molto semplice ma esemplare, in cui $\mathbf{f}(x):=1$, $\mathbf{g}(x):=|\,x\,|$ e $x_0:=0$, è facile vedere che il quoziente $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ può essere reso arbitrariamente grande scegliendo $|\,x\,|$ sufficientemente piccolo; per esprimere tale comportamento di $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$, è opportuno ampliare il concetto di "limite".

Sia $\mathbf{f}$ una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Si dice che *il limite per x che tende a x_0 di $\mathbf{f}(x)$ è "più infinito"* e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} \mathbf{f}(x) = +\infty$$

se $\qquad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) > \varepsilon).$

Si dice che *il limite per x che tende a x_0 di $\mathbf{f}(x)$ è "meno infinito"* e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} \mathbf{f}(x) = -\infty$$

se $\qquad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) < -\varepsilon).$

Si dice talvolta che *il limite per x che tende a x_0 di $\mathbf{f}(x)$ è "infinito"* e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} \mathbf{f}(x) = \infty$$

se $\qquad (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad |\, \mathbf{f}(x)\,| > \varepsilon)$

ossia se $\qquad \displaystyle\lim_{x\to x_0} |\, \mathbf{f}(x)\,| = +\infty.$

Noi tuttavia non useremo mai quest'ultima notazione.

Esempi

17.5.1 $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

17.5.2 $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

17.5.3 $$\lim_{x\to 0^+} \mathbf{log}_a(x) = -\infty \qquad \text{per } a \in (1,\ +\infty)$$

17.5.4 $$\lim_{x\to 0^+} \mathbf{log}_a(x) = +\infty \qquad \text{per } a \in (0, 1)$$ ([29])

[29] Si osservi che, per il teorema 10.4.3, $\mathbf{log}_a(x) = -\mathbf{log}_{\frac{1}{a}}(x)$.

17.6 - Limite per x che tende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Sia $\mathbf{f}$ una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. La conoscenza del limite per x che tende a x_0 di $\mathbf{f}(x)$ (se tale limite esiste) permette di descrivere l'andamento di $\mathbf{f}$ in un intorno di x_0. Se $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ non è limitato superiormente (oppure non è limitato inferiormente), è possibile estendere la definizione di limite in modo da poter talvolta descrivere l'andamento di $\mathbf{f}$ quando x assume valori positivi (o, rispettivamente, negativi) arbitrariamente grandi in valore assoluto.

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ non è superiormente limitato.

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si dice che λ è il *limite di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a "più infinito"* e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f}(x) = \lambda$$

se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$(x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})) \wedge (x > \delta) \quad \Rightarrow \quad |\, \mathbf{f}(x) - \lambda \,| < \varepsilon$$

ossia (cfr. Corollario 15.2.2) tale che

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (\delta,\ +\infty) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) \in (\lambda - \varepsilon,\ \lambda + \varepsilon).$$

Si dice che il *limite di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a "più infinito" è "più infinito"* e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f}(x) = +\infty$$

se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$(x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})) \wedge (x > \delta) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) > \varepsilon$$

ossia (cfr. Corollario 15.2.2) tale che

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (\delta,\ +\infty) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) \in (\varepsilon,\ +\infty).$$

Si dice che il *limite di* $\mathbf{f}$ *per* x *che tende a "più infinito" è "meno infinito"* e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f}(x) = -\infty$$

se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$(x \in \mathcal{D}(\mathbf{f})) \wedge (x > \delta) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) < -\varepsilon$$

ossia (cfr. Corollario 15.2.2) tale che

$$x \in \mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap (\delta,\ +\infty) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(x) \in (-\infty,\ -\varepsilon).$$

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ non è inferiormente limitato.

Sia $\lambda\in\mathbb{R}$. Si dice che λ è il *limite di* **f** *per* x *che tende a "meno infinito"* e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f}(x)=\lambda$$

se per ogni $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ esiste $\delta\in\mathbb{R}^+$ tale che

$$(x\in\mathcal{D}(\mathbf{f}))\wedge(x<-\delta)\quad\Rightarrow\quad|\,\mathbf{f}(x)-\lambda\,|<\varepsilon$$

ossia (cfr. Corollario 15.2.2) tale che

$$x\in\mathcal{D}(\mathbf{f})\cap(-\infty,\,-\delta)\quad\Rightarrow\quad\mathbf{f}(x)\in(\lambda-\varepsilon,\ \lambda+\varepsilon).$$

Si dice che il *limite di* **f** *per* x *che tende a "meno infinito" è "più infinito"* e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f}(x)=+\infty$$

se per ogni $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ esiste $\delta\in\mathbb{R}^+$ tale che

$$(x\in\mathcal{D}(\mathbf{f}))\wedge(x<-\delta)\quad\Rightarrow\quad\mathbf{f}(x)>\varepsilon$$

ossia (cfr. Corollario 15.2.2) tale che

$$x\in\mathcal{D}(\mathbf{f})\cap(-\infty,\,-\delta)\quad\Rightarrow\quad\mathbf{f}(x)\in(\varepsilon,\ +\infty).$$

Si dice che il *limite di* **f** *per* x *che tende a "meno infinito" è "meno infinito"* e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f}(x)=-\infty$$

se per ogni $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ esiste $\delta\in\mathbb{R}^+$ tale che

$$(x\in\mathcal{D}(\mathbf{f}))\wedge(x<-\delta)\quad\Rightarrow\quad\mathbf{f}(x)<-\varepsilon$$

ossia (cfr. Corollario 15.2.2) tale che

$$x\in\mathcal{D}(\mathbf{f})\cap(-\infty,\,-\delta)\quad\Rightarrow\quad\mathbf{f}(x)\in(-\infty,\,-\varepsilon).$$

Esempi

17.6.1 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\,;\qquad\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0;$$

17.6.2 $$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\,;\qquad\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty;$$

17.6.3 $$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty\,;\qquad\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$$

Si è così visto che è possibile assegnare significato all'espressione

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \lambda$$

anche per $x_0 = +\infty$ (o $x_0 = -\infty$) e/o $\lambda = +\infty$ (o $\lambda = -\infty$). È talvolta comodo ampliare il significato dei termini "intorno" e "punto di accumulazione" in modo da poter estendere anche a questi casi la validità del teorema 17.1.8.

Sia $\delta \in \mathbb{R}^+$. Diremo *intorno di* $+\infty$ *individuato da* δ l'intervallo aperto $(\delta, +\infty)$; diremo *intorno di* $-\infty$ *individuato da* δ l'intervallo aperto $(-\infty, -\delta)$.

Sia $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$. Coerentemente con quanto posto in 15.6, diremo che $+\infty$ *è un punto di accumulazione per* $\mathbf{A}$ se ad ogni intorno di $+\infty$ appartiene un elemento di $\mathbf{A}$, ossia se $\mathbf{A}$ non è superiormente limitato; diremo che $-\infty$ *è un punto di accumulazione per* $\mathbf{A}$ se ad ogni intorno di $-\infty$ appartiene un elemento di $\mathbf{A}$, ossia se $\mathbf{A}$ non è inferiormente limitato.

Lo studente è invitato a verificare che, con queste definizioni, il teorema 17.1.8 resta valido se $x_0 = +\infty$ (o $x_0 = -\infty$) e/o $\lambda = +\infty$ (o $\lambda = -\infty$).

17.7 - Operazioni in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e limiti infiniti.

Si può dimostrare abbastanza facilmente che i risultati espressi dai teoremi 17.3.1, 17.3.2 e 17.3.4 continuano a valere se x_0 indica, anziché un numero reale, uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$. È inoltre possibile in molti casi determinare il limite per x che tende a x_0 (con $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) della somma, del prodotto, del quoziente o della potenza di due funzioni anche se il limite di una di queste è $+\infty$ oppure $-\infty$.

Teorema 17.7.1

Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{g})$ (con $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$). Allora

(i) se $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = +\infty$ ed esiste un intorno di x_0 nel quale $\mathbf{g}$ è inferiormente limitata, allora

$$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = +\infty;$$

in particolare:

se $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = +\infty$ e ($\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = +\infty$ oppure $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$), allora

$$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = +\infty;$$

(ii) se $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x) = -\infty$ ed esiste un intorno di x_0 nel quale **g** è superiormente limitata, allora

$$\lim_{x\to x_0}(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x) = -\infty;$$

in particolare:

se $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x) = -\infty$ e ($\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{g}(x) = -\infty$ oppure $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{g}(x) = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$), allora

$$\lim_{x\to x_0}(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x) = -\infty;$$

(iii) se $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x) = +\infty$ ed esiste un intorno di x_0 nel quale **g** è inferiormente limitata da un numero reale $\alpha > 0$, allora

$$\lim_{x\to x_0}(\mathbf{fg})(x) = +\infty;$$

in particolare:

se $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x) = +\infty$ e ($\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{g}(x) = +\infty$ oppure $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{g}(x) = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$), allora

$$\lim_{x\to x_0}(\mathbf{fg})(x) = +\infty;$$

(iv) se $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x) = +\infty$ ed esiste un intorno di x_0 nel quale **g** è superiormente limitata da un numero reale $\alpha < 0$, allora

$$\lim_{x\to x_0}(\mathbf{fg})(x) = -\infty;$$

in particolare:

se $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x) = +\infty$ e ($\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{g}(x) = -\infty$ oppure $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{g}(x) = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}^-$), allora

$$\lim_{x\to x_0}(\mathbf{fg})(x) = -\infty;$$

(v) se $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x) = -\infty$ ed esiste un intorno di x_0 nel quale **g** è inferiormente limitata da un numero reale $\alpha > 0$, allora

$$\lim_{x\to x_0}(\mathbf{fg})(x) = -\infty;$$

in particolare:

se $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x) = -\infty$ e ($\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{g}(x) = +\infty$ oppure $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{g}(x) = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$), allora

$$\lim_{x\to x_0}(\mathbf{fg})(x) = -\infty;$$

(vi) se $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = -\infty$ ed esiste un intorno di x_0 nel quale **g** è superiormente limitata da un numero reale $\alpha < 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{fg})(x) = +\infty;$$

in particolare:

se $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = -\infty$ e ($\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = -\infty$ oppure $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}^-$), allora

$$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{fg})(x) = +\infty;$$

(vii) se $\lim\limits_{x \to x_0} |\,\mathbf{g}(x)\,| = +\infty$, allora $\lim\limits_{x \to x_0} (\frac{1}{\mathbf{g}})(x) = 0$;

$(viii)$ se $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = 0$, ed esiste un intorno di x_0 nel quale **g** non assume mai valori negativi, allora

$$\lim_{x \to x_0} (\frac{1}{\mathbf{g}})(x) = +\infty \, ;$$

(ix) se $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = 0$, ed esiste un intorno di x_0 nel quale **g** non assume mai valori positivi, allora

$$\lim_{x \to x_0} (\frac{1}{\mathbf{g}})(x) = -\infty \, ;$$

Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema. Si noti che (vii), $(viii)$ e (ix) possono essere utilizzati per affrontare i quozienti $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ grazie alla relazione $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} = \mathbf{f} \cdot \frac{1}{\mathbf{g}}$.

Anche il teorema del cambiamento di variabile (17.3.4) può essere esteso ai casi in cui x_0, y_0, λ appartengono a $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, con opportuna riformulazione (che escluda la condizione (b) quando $y_0 = \pm\infty$, ed escluda la possibilità che y_0 sia punto isolato per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ con $\mathbf{f}(y_0) = \lambda$ quando $y_0 = \pm\infty$ o $\lambda = \pm\infty$). Si noti ancora una volta l'importanza della condizione (a) (ed eventualmente (b)) del teorema 17.3.4; infatti

$$\lim_{x \to +\infty} |\,\mathbf{sgn}(\frac{1}{x} \cdot \mathbf{sin}(x))\,| \quad \text{non esiste,}$$

ma $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \mathbf{sin}(x) = 0$ e $\lim\limits_{y \to 0} |\,\mathbf{sgn}(y)\,| = 1.$

Esempi

17.7.2 $$\lim_{x\to 0}(x+2)^{\frac{1}{|x\cdot\mathbf{sin}(\frac{1}{x})|}} = +\infty.$$

17.7.3 $$\lim_{x\to+\infty}\mathbf{log}_{a}(x) = +\infty \qquad \text{per } a\in(1, +\infty)\ ({}^{30})$$

17.7.4 $$\lim_{x\to+\infty}\mathbf{log}_{a}(x) = -\infty \qquad \text{per } a\in(0, 1)\ ({}^{31})$$

17.8 - L'insieme esteso dei numeri reali.

Alcuni dei risultati espressi dal teorema 17.7.1 possono essere facilmente ricordati "estendendo" le operazioni di somma, prodotto, quoziente, elevamento a potenza (con base positiva) all'insieme $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ (detto talvolta *insieme dei numeri reali esteso*). Se si pone, ad esempio,

$$(+\infty)+(+\infty) := +\infty\,; \qquad (-\infty)+(-\infty) := -\infty\,;$$

e, per $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\alpha+(+\infty) := +\infty\,; \qquad (+\infty)+\alpha := +\infty\,;$$
$$\alpha+(-\infty) := -\infty\,; \qquad (-\infty)+\alpha := -\infty\,;$$

l'enunciato del punto (i) del teorema 17.3.1 resta valido, in base al teorema 17.7.1, per $F, G \in\mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ purché non sia

$$F = +\infty \qquad \text{e} \qquad G = -\infty$$

oppure $$F = -\infty \qquad \text{e} \qquad G = +\infty.$$

Lo studente può, se crede, descrivere in una tabella le possibili estensioni a $\mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ delle operazioni di somma, prodotto, quoziente, elevamento a potenza, in modo da poter interpretare quanta più parte possibile dell'enunciato del teorema 17.7.1 come un'estensione del teorema 17.3.1: si tratta di un utile esercizio che può avere applicazione pratica nel calcolo dei limiti.

Resti però ben chiaro che $+$ e $\cdot$ non saranno comunque operazioni in $\mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ nel senso che abbiamo definito in 7.1 (non essendo possibile, ad esempio, definire in coerenza col teorema 17.3.1 la somma $(+\infty)+(-\infty)$ o il prodotto $0\cdot(+\infty)$, come vedremo in 17.11); mentre sarebbe comunque riduttivo leggere il teorema 17.7.1 solo come estensione del teorema 17.3.1: infatti, ad esempio, $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(x+\mathbf{sin}(x)\Big)$ è calcolabile mediante il teorema 17.7.1 perché $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ e ($\mathbf{sin}(x)\le 1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$), ma <u>non</u> esiste

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{sin}(x).$$

[30] Si tenga presente 17.5.3 e si ricordi che $\mathbf{log}_{a}(\frac{1}{x}) = \mathbf{log}_{a}(1) - \mathbf{log}_{a}(x) = -\mathbf{log}_{a}(x)$.

[31] Si tenga presente 17.5.4 e si ricordi ancora quanto osservato nella nota precedente.

17.9 - Il numero e ed alcuni limiti notevoli ad esso collegati.

Si dimostra che esiste il $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

e che si tratta di un numero reale (irrazionale) compreso tra 2 e 3 (il cui valore approssimato è $2{,}718281828459\ldots$). Tale numero si indica con e. Dunque

$$e := \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Vediamo in questa sezione alcuni limiti notevoli collegati a questo fatto.

$\boxed{17.9.1}$ $$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Dimostrazione – Posto $y := -x$ (da cui $x = -y$), si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}.$$

D'altro lato, si ha

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

e dunque $$\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}.$$

Poniamo infine $z := y-1$ (da cui $y = z+1$). Allora

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right) = e.$$

$\boxed{17.9.2}$

Per ogni $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, $$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e) = \frac{1}{\log_e(a)}.$$

Dimostrazione – Si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to0^+}\log_a\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) =$$

(ponendo $y := \frac{1}{x}$) $$= \lim_{y\to+\infty}\log_a\left((1+\frac{1}{y})^y\right) =$$

(ponendo $z := (1+\frac{1}{y})^y$) $$= \lim_{z\to e}\log_a(z) = \log_a(e).$$

Analogamente, per 17.9.1 si trova che $\lim_{x\to0^-}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e)$ e dunque si ha l'asserto per il teorema 17.2.4.

17.9.3

Per ogni $a \in \mathbb{R}^+$ si ha $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \mathbf{log}_{\boldsymbol{e}}(a).$$

Dimostrazione — Se $a = 1$, la funzione $\frac{a^x-1}{x}$ è la funzione costante uguale a zero in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, e l'asserto segue dalla definizione stessa di limite (cfr. 17.1).

Se $a \neq 1$, si pone $y := a^x - 1$ (da cui $x = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(1+y)$). Ricordando il limite 17.9.2, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(1+y)}{y}} = \mathbf{log}_{\boldsymbol{e}}(a).$$

I limiti 17.9.2 e 17.9.3 suggeriscono la scelta di e quale base per la funzione logaritmo definita in 10.4. L'utilità di tale scelta sarà definitivamente chiarita più avanti (18.2.13).

Le funzioni $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{e}}$ e $\mathbf{log}_{\boldsymbol{e}}$ si dicono rispettivamente *esponenziale* (senza altro specificare) e *logaritmo naturale*, e si indicano rispettivamente con **exp** e **ln**.

Dai limiti 17.9.2 e 17.9.3 segue per $a := e$

17.9.4 $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{ln}(1+x)}{x} = 1 \quad ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Esercizio 17.9.5

Calcolare $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x+1}.$$

Soluzione — Si ha

$$\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x+1} = \left(\frac{x+3+2}{x+3}\right)^{x+1} = \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{x+1}.$$

Conviene allora porre $y := \frac{x+3}{2}$ (da cui $x = 2y-3$, $x+1 = 2y-2$, $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{y}$); dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{x+1} =$$

$$\lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y-2} = \lim_{y\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^{\frac{2y-2}{y}} = e^2$$

17.10 - Forme "non immediate".

Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{g})$ (con $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) per il quale esistono

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x).$$

Se $$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = -\infty,$$

i teoremi 17.3.1 e 17.7.1 non consentono di calcolare il

$$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x));$$

si dice che tale limite si presenta nella forma "non immediata" $\infty - \infty$.

Parimenti, se $$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = 0,$$

oppure $$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = \pm\infty,$$

i teoremi 17.3.1 e 17.7.1 non consentono di calcolare il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)};$$

si dice allora che tale limite si presenta nella forma "non immediata" $\frac{0}{0}$ oppure, rispettivamente, $\frac{\infty}{\infty}$.

Si individuano analogamente forme "non immediate" indicate con $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0. Tutte queste situazioni possono essere spesso affrontate con successo utilizzando sapientemente il teorema 17.3.4 e i "limiti notevoli" conosciuti (fra i quali segnaliamo: 17.1.4, 17.4.1, 17.4.2, la definizione di e, 17.9.2 e 17.9.3); tali mezzi non sono però sempre sufficienti: non consentono ad esempio di calcolare

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \mathbf{ln}(x) \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{ln}(x)}{x}.$$

Vedremo nel capitolo 20 alcuni teoremi molto utili per il calcolo di limiti che si presentano in forme "non immediate".

Osservazione 17.10.1

Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{g})$. Esista un intorno $\mathbf{I}$ di x_0 tale che $\mathbf{f}(x) > 0$ per $x \in \mathbf{I} \setminus \{x_0\}$, e sia

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = +\infty.$$

Allora $$\lim_{x \to x_0} (\mathbf{f}(x))^{\mathbf{g}(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\mathbf{ln}\left((\mathbf{f}(x))^{\mathbf{g}(x)}\right)} = \lim_{x \to x_0} e^{\mathbf{g}(x) \cdot \mathbf{ln}(\mathbf{f}(x))} = 0$$

perché $$\lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) \cdot \mathbf{ln}(\mathbf{f}(x)) = -\infty$$

essendo $$\lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{ln}(\mathbf{f}(x)) \overset{(23.3.4)}{=} \lim_{y \to 0} \mathbf{ln}(y) = -\infty.$$

17.11 - Esercizi sui limiti.

17.11.1 $\lim_{x\to+\infty}(x+\mathbf{sin}(x)) = +\infty$ (si noti che $\lim_{x\to+\infty}\mathbf{sin}(x)$ non esiste)

17.11.2 $\lim_{x\to 0^+}(\mathbf{ln}(x)+\mathbf{Dir}(x)) = -\infty$ (**Dir** è la funzione di Dirichlet, cfr. 15.1)

17.11.3 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathbf{cos}(x+3)}{x} = -\infty$$

17.11.4 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^2\mathbf{sin}(\frac{1}{x})}{x^2} = +\infty$$

17.11.5 $$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x} = -\infty$$

17.11.6 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\mathbf{ln}(x)} = 0$$

17.11.7 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\cdot\left|\mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right)\right|} = +\infty$$

17.11.8 $$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1} = -\infty\ ; \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1} = +\infty\ ;$$

17.11.9 $\lim_{x\to+\infty}\left(\mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = 0$ (cfr. osservazione 17.10.1).

17.11.10 LIMITI DELLA FORMA "$\infty - \infty$"

$\lim_{x\to+\infty}(x+(1-x)) = 1$;

$\lim_{x\to+\infty}(2x-x) = +\infty$;

$\lim_{x\to+\infty}(x+(\mathbf{sin}(x)-x))$ non esiste ;

17.11.11 LIMITI DELLA FORMA “$\frac{\infty}{\infty}$”

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2 \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+2}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = +\infty \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x+5}{2x^4-3x^2+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4}}{2-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^4}} = 0 \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x\cdot(\mathbf{sin}(x)+2))}{x} \quad \text{non esiste ;}$$

17.11.12 LIMITI DELLA FORMA “$0 \cdot \infty$”

Ogni limite della forma “$\frac{\infty}{\infty}$” può essere interpretato come un limite della forma “$0 \cdot \infty$”.

17.11.13 LIMITI DELLA FORMA “$\frac{0}{0}$”

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sin}(x)}{x} = 1 \;;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\mathbf{sin}(x)} = 0 \;;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sin}(x)}{x^3} = +\infty \;;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\mathbf{sin}(\frac{1}{x})}{x} \quad \text{non esiste ;}$$

17.11.14 LIMITI DELLA FORMA “1^{∞}”

Esempi di limiti di questa forma sono stati presentati nella sezione 17.9.

17.11.15 ESERCIZI DI RIEPILOGO

Si calcolino, qualora esistano, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x^2))}{1-\cos(x)} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-2\cdot\sin(x))}{\cos(x)-x} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cdot\cos^2(x)+\cos(x)-4}{e^{2x}+1-2\cdot e^x} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\cdot\sin(x)}-2}{x^2-\cos(x^2)} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x^2)}-1}{\cos(x)-1} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4x+2}-\sqrt{x^2-4x+2}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{-2x+3}} \; ;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(3x^2+2x)\cdot\ln(1+\frac{\sin(x)}{x})}{(x-1)\cdot\sin(x)} \; ;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(2x^2+3x)\cdot\ln(1+\frac{\cos(x)}{x})}{(x-2)\cdot\cos(x)} \; ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x^2 \cdot \mathbf{cos}\left(\mathbf{ln}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x^2 \cdot \mathbf{cos}\left(\mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\frac{x-\mathbf{sin}(x)}{x+\mathbf{cos}(x)};$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \mathbf{ln}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x-\mathbf{cos}(x)}{x+\mathbf{sin}(x)}.$$

18.- DERIVATE

18.1 - Incremento. Rapporto incrementale.

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione.

Se $a, b \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$, il numero reale

$$\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)$$

si dice *incremento* della **f** (anche se è un numero negativo!) relativo all'intervallo $[a, b]$. Naturalmente, questo dato risulta più significativo se viene rapportato all'ampiezza dell'intervallo considerato.

Si dice *rapporto incrementale* della **f** (relativo all'intervallo $[a, b]$) il numero reale

$$\frac{\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)}{b-a}.$$

Osservazione 18.1.1

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e siano $a, b \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Siano $\mathbf{A} \equiv (a, \mathbf{f}(a))$ e $\mathbf{B} \equiv (b, \mathbf{f}(b))$ i punti del grafico di **f** aventi ascissa rispettivamente a e b. La retta per **A** e **B** (che talvolta viene detta *corda* del grafico relativa all'intervallo $[a, b]$) ha equazione (teorema 13.8.1)

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-\mathbf{f}(a)}{\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)}$$

ossia

$$y = \frac{\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)}{b-a}\,(x-a) + \mathbf{f}(a)$$

e dunque ha per coefficiente angolare il rapporto incrementale di **f** relativo all'intervallo $[a, b]$.

18.2 - Derivata in un punto.

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia x_0 un punto interno a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Per ogni numero reale h tale che $x_0 + h \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ è definito il rapporto incrementale di **f** relativo all'intervallo $[x_0, x_0 + h]$; esso è dunque una funzione di h, detta spesso *rapporto incrementale di* **f** *relativo a* x_0, il cui dominio (essendo per ipotesi x_0 interno a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$) è un intorno forato di 0. Tale funzione presenta una singolarità per $h := 0$. Se tale singolarità è eliminabile, la funzione **f** si dice *derivabile in* x_0, e il numero reale

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h}$$

si dice *derivata* di **f** in x_0.

Dunque se $x_0 \in \mathbb{R}$ e **f** è una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che **f** *è derivabile in* x_0 se:

– x_0 è un punto interno al dominio di **f**

e inoltre

– esiste ed è finito il $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h}$.

Si noti che

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0)}{x-x_0}.$$

La derivata di **f** in x_0, se esiste, si indica di solito con uno dei seguenti simboli:

$$\mathbf{f}\,'(x_0) \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \qquad \mathrm{D}\mathbf{f}|_{x_0}.$$

Esempio 18.2.1

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una traiettoria rettilinea partendo da un certo punto **P** in un dato istante. Possiamo descrivere il moto del punto materiale esprimendo la sua posizione (cioè la sua distanza da **P**, misurabile con un numero reale!) in funzione del tempo trascorso dall'istante iniziale ([32]); si ottiene così una funzione $\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathbf{s}(\mathrm{t}) := \text{distanza del punto materiale da } \mathbf{P} \text{ dopo il tempo t.}$$

Sia t_0 un numero reale positivo. Allora

$$\mathbf{s}(\mathrm{t}) - \mathbf{s}(\mathrm{t}_0)$$

è l'incremento (relativo all'intervallo di tempo $[t_0, t]$) della distanza del punto materiale da **P**, cioè lo spazio percorso tra gli istanti t_0 e t. Rapportando questo numero all'ampiezza dell'intervallo di tempo considerato si ottiene il rapporto incrementale della funzione **s**

$$\frac{\mathbf{s}(t)-\mathbf{s}(t_0)}{t-t_0}$$

che in questo caso è detto *velocità media* relativa all'intervallo di tempo $[t_0, t]$. Se consideriamo intervalli di tempo di ampiezza diversa, la velocità media ad essi relativa cambia in generale; ed è chiaro che tale velocità media descrive tanto meglio la "velocità all'istante t_0" quanto più piccolo è l'intervallo considerato. Se esiste, ed è finito, il limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{s}(t)-\mathbf{s}(t_0)}{t-t_0}$$

si dice *velocità istantanea* in t_0.

[32] Supponiamo naturalmente fissate unità di misura per lo spazio e il tempo.

Esempio 18.2.2

Sia $\mathbf{f}(x) := \dfrac{1}{x}$. Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha

$$\mathbf{f}'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x_0+h)(x_0)} = -\frac{1}{x_0^2}$$ come si voleva.

Esempio 18.2.3

Sia $\mathbf{f}(x) := \lambda$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$, costante). Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha $\mathbf{f}'(x_0) = 0$.

Dimostrazione — Si ha infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda-\lambda}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Osservazione 18.2.4

Per l'esempio 18.2.3, la derivata di una funzione costante è ovunque uguale a zero. Notiamo esplicitamente che questo risultato <u>non</u> è invertibile: se la derivata di una funzione è ovunque uguale a zero, la funzione in generale <u>non</u> è costante. Ad esempio, la restrizione di $[x]$ (la funzione "parte intera", cfr. 15.1) a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ è derivabile in tutto il suo dominio e ha derivata ovunque uguale a zero, ma non è certo costante!

Tuttavia, il risultato espresso dall'esempio 18.2.3 è invertibile per le funzioni il cui dominio sia <u>un</u> <u>intervallo</u>. Vale infatti il seguente teorema, del quale omettiamo la dimostrazione:

Teorema 18.2.5

Sia **I** un intervallo di numeri reali, e sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in **I** e derivabile nell'interno di **I**. Se $\mathbf{f}'(x_0) = 0$ per ogni x_0 appartenente all'interno di **I**, allora **f** è costante in **I**.

Esempio 18.2.6

Sia $\mathbf{f}(x) := x$. Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha

$$\mathbf{f}\,'(x_0) = 1.$$

Dimostrazione — Si ha infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Esempio 18.2.7

Sia $\mathbf{f}(x) := \sqrt[3]{x}$. Mostriamo che **f** non è derivabile in 0. Si ha in effetti

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(0+h)-\mathbf{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}-\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{h^2}} = +\infty.$$

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h} = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h} = -\infty,$$

si dice talvolta che **f** ha *derivata infinita* in x_0.

Esempio 18.2.8

Sia $\mathbf{f}(x) := |\,x\,|$. Mostriamo che **f** non è derivabile in 0. Si ha in effetti

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{f}(0+h)-\mathbf{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

mentre

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\mathbf{f}(0+h)-\mathbf{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.$$

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se esistono, i limiti

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h} \qquad \text{e} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h}$$

si dicono, rispettivamente, *derivata destra* e *derivata sinistra* della **f** in x_0.

Osservazione 18.2.9

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Per il teorema 17.2.4, **f** è derivabile in x_0 se e solo se esistono, sono finite e sono uguali fra loro le derivate destra e sinistra di **f** in x_0.

Esercizio 18.2.10

Stabilire se la funzione $x \cdot |\, x \,|$ è derivabile in tutto il suo dominio.

Esempio 18.2.11

Sia $n \in \mathbb{Z}^+$, e sia $\mathbf{f}(x) := x^n$. Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha

$$\mathbf{f}\,'(x_0) = n x_0^{n-1}.$$

Dimostrazione — Si ha infatti

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{n x_0^{n-1} h + h^2 \vartheta}{h} =$$

(dove ϑ tende a $\binom{n}{2} x_0^{n-2}$ quando h tende a zero)

$$= \lim_{h \to 0} \left(n x_0^{n-1} + h\vartheta \right) = n x_0^{n-1}.$$

Esempio 18.2.12

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $\mathbf{f}(x) := x^\alpha$. Si può dimostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha

$$\mathbf{f}\,'(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

Esempio 18.2.13

Sia $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, e sia $\mathbf{f}(x) := \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(x)$. Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^+$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha

$$\mathbf{f}\,\text{'}(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(e).$$

In particolare, la derivata in x_0 della funzione $\mathbf{ln}(x)$ è $\dfrac{1}{x_0}$.

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h) - \mathbf{f}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(x_0+h) - \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0} \cdot x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{y \to 0} \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(1+y)}{y} = \frac{1}{x_0} \cdot \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(e)$$

avendo posto $y := \dfrac{h}{x_0}$ e ricordando il limite notevole 17.9.2.

Esempio 18.2.14

Sia $a \in \mathbb{R}^+$, e sia $\mathbf{f}(x) := a^x$. Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha

$$\mathbf{f}\,\text{'}(x_0) = a^{x_0} \cdot \mathbf{ln}(a).$$

In particolare, la derivata in x_0 della funzione e^x è e^{x_0}.

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0+h) - \mathbf{f}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0} a^h - a^{x_0}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0}(a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \cdot \mathbf{ln}(a)$$

ricordando il limite notevole 17.9.3.

Esempio 18.2.15

Sia $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}(x)$. Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha

$$\mathbf{f}\,'(x_0) = \mathbf{cos}(x_0).$$

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{sin}(x_0+h)-\mathbf{sin}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{sin}(x_0)\mathbf{cos}(h)+\mathbf{cos}(x_0)\mathbf{sin}(h)-\mathbf{sin}(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\mathbf{sin}(x_0)\mathbf{cos}(h)-\mathbf{sin}(x_0)}{h} + \frac{\mathbf{cos}(x_0)\mathbf{sin}(h)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{sin}(x_0)\mathbf{cos}(h)-\mathbf{sin}(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{cos}(x_0)\mathbf{sin}(h)}{h} =$$

$$= \mathbf{sin}(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{cos}(h)-1}{h} + \mathbf{cos}(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{sin}(h)}{h} =$$

$$= \mathbf{sin}(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \left(-h \cdot \frac{1-\mathbf{cos}(h)}{h^2} \right) + \mathbf{cos}(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{sin}(h)}{h} =$$

$$= \mathbf{sin}(x_0) \cdot 0 + \mathbf{cos}(x_0) \cdot 1 = \mathbf{cos}(x_0)$$

ricordando i limiti notevoli 17.4.1 e 17.1.4.

Esempio 18.2.16

Sia $\mathbf{f}(x) := \mathbf{cos}(x)$. Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la funzione **f** è derivabile in x_0, e che si ha

$$\mathbf{f}\,'(x_0) = -\,\mathbf{sin}(x_0).$$

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{cos}(x_0+h)-\mathbf{cos}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{cos}(x_0)\mathbf{cos}(h)-\mathbf{sin}(x_0)\mathbf{sin}(h)-\mathbf{cos}(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\mathbf{cos}(x_0)\mathbf{cos}(h)-\mathbf{cos}(x_0)}{h} - \frac{\mathbf{sin}(x_0)\mathbf{sin}(h)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{cos}(x_0)\mathbf{cos}(h)-\mathbf{cos}(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{sin}(x_0)\mathbf{sin}(h)}{h} =$$

$$= \mathbf{cos}(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{cos}(h) - 1}{h} - \mathbf{sin}(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{sin}(h)}{h} =$$

$$= \mathbf{cos}(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \left(-h \cdot \frac{1 - \mathbf{cos}(h)}{h^2} \right) - \mathbf{sin}(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{sin}(h)}{h} =$$

$$= \mathbf{cos}(x_0) \cdot 0 - \mathbf{sin}(x_0) \cdot 1 = -\mathbf{sin}(x_0)$$

ricordando i limiti notevoli 17.4.1 e 17.1.4.

18.3 - Significato geometrico della derivata. Tangente al grafico in un punto.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Sia poi $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x_0 + h \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$, e consideriamo i due punti $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$, $\mathbf{P} \equiv (x_0 + h, \mathbf{f}(x_0 + h))$ del grafico di **f**. Si è osservato in 18.1.1 che la retta per $\mathbf{P}_0$ e **P** ha per coefficiente angolare il rapporto incrementale di **f** relativo all'intervallo $[x_0, x_0 + h]$.

Se esiste il limite per h che tende a 0 del rapporto incrementale di **f** relativo all'intervallo $[x_0, x_0 + h]$ (cioè, se esiste la derivata di **f** in x_0), si definisce la *tangente* in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f**. Precisamente:

– se **f** è derivabile in x_0, si dice *tangente* in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f** la retta passante per $\mathbf{P}_0$ di coefficiente angolare $\mathbf{f}'(x_0)$; tale retta, come sappiamo (cfr. 13.10.F1), ha equazione

$$y = \mathbf{f}'(x_0)(x - x_0) + \mathbf{f}(x_0).$$

– se **f** ha derivata infinita in x_0, si dice *tangente* in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f** la retta passante per $\mathbf{P}_0$ parallela all'asse delle ordinate; tale retta, come sappiamo, ha equazione

$$x = x_0.$$

Esempio 18.3.1

Sia $\mathbf{f}(x) := x^2$, e sia $x_0 := 1$.
Poiché (cfr. esempio 18.2.11) $\mathbf{f}'(x_0) = 2x_0 = 2$, la retta tangente in $\mathbf{P}_0 \equiv (1, 1)$ al grafico di **f** è la retta di equazione $\quad y = 2(x - 1) + 1$
ossia $\quad y = 2x - 1.$
Si noti che tale retta ha il solo punto $\mathbf{P}_0$ in comune col grafico di **f**. Anche la retta di equazione

$$x = 1$$

ha il solo punto $\mathbf{P}_0$ in comune col grafico di **f**; tuttavia quest'ultima retta, secondo la nostra definizione, <u>non</u> è da considerarsi tangente al grafico di **f**.

Esempio 18.3.2

Sia $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}(x)$, e sia $x_0 := 0$.
Poiché (18.2.15) $\mathbf{f}'(x_0) = \mathbf{cos}(x_0) = 1$, la retta tangente in $\mathbf{P}_0 \equiv (0, 0)$ al grafico di **f** è la retta di equazione
$$y = x.$$

Esempio 18.3.3

Sia $\mathbf{f}(x) := \mathbf{cos}(x)$, e sia $x_0 := 0$.
Poiché (18.2.16) $\mathbf{f}'(x_0) = -\mathbf{sin}(x_0) = 0$, la retta tangente in $\mathbf{P}_0 \equiv (0, 1)$ al grafico di **f** è la retta di equazione
$$y = 1.$$
Si noti che tale retta ha infiniti punti in comune col grafico di **f**.

Esempio 18.3.4

Sia $\mathbf{f}(x) := \sqrt[3]{x}$, e sia $x_0 := 0$.
Come si è visto in 18.2.7, **f** in x_0 ha derivata infinita. Dunque la retta tangente in $\mathbf{P}_0 \equiv (0, 0)$ al grafico di **f** è l'asse delle ordinate.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se esiste la derivata sinistra di **f** in x_0, si definisce la *tangente a sinistra* in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f**. Precisamente:

– se la derivata sinistra di **f** in x_0 è un numero d, si dice *tangente a sinistra* in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f** la retta passante per $\mathbf{P}_0$ di coefficiente angolare d, di equazione $y = d(x - x_0) + \mathbf{f}(x_0)$.

– se la derivata sinistra di **f** in x_0 è $+\infty$ oppure $-\infty$, si dice *tangente a sinistra* in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f** la retta passante per $\mathbf{P}_0$ parallela all'asse delle ordinate, di equazione $x = x_0$.

Se esiste la derivata destra di **f** in x_0, si definisce in modo del tutto analogo la *tangente a destra* in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f**.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. I punti interni al dominio di **f** possono essere classificati con pittoreschi nomi considerando in essi le eventuali derivate destra e sinistra di **f**.

Sia x_0 un punto interno al dominio di **f**. Se in x_0 esistono e sono diverse le derivate sinistra e destra di **f**, si dice che **f** presenta in x_0 un *punto angoloso* (o, con linguaggio più antico, un *punto angolare*), distinguendo ulteriormente tra: *punto cuspidale*, se la derivata sinistra di **f** in x_0 è $+\infty$ e la derivata destra di **f** in x_0 è $-\infty$, o viceversa (e in tal caso il punto $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$ del grafico di **f** si dice una *cuspide*); e *punto angoloso proprio* se le due derivate sinistra e destra di **f** in x_0 non sono entrambe infinite.

Esempio 18.3.5

La funzione $\mathbf{f}(x) := x^2 + x - |x|$ presenta in 0 un punto angoloso proprio.

Esempio 18.3.6

La funzione $\mathbf{f}(x) := \sqrt[3]{x^2}$ presenta in 0 un punto cuspidale. Ciò si può esprimere con parole diverse ma equivalenti dicendo che: l'origine è una cuspide per il grafico di **f**.

Osservazione 18.3.7

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$ una cuspide per il grafico di **f**. In base alle definizioni che abbiamo dato, la retta ***r*** di equazione $x = x_0$ è tangente in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f** sia a sinistra che a destra; tale retta si può dunque considerare tangente *tout court* in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f**. Si noti che esistono un intorno sinistro e un intorno destro di x_0 tali che i corrispondenti archi del grafico di **f** giacciono in semipiani opposti rispetto a ***r***: ciò si esprime dicendo che la tangente in $\mathbf{P}_0$ *attraversa* il grafico di **f**. Vedremo una situazione analoga nell'osservazione 21.4.3.

18.4 - Continuità e derivabilità.

Teorema 18.4.1

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se **f** è derivabile in x_0, allora **f** è continua in x_0.

Dimostrazione — Per l'osservazione 17.1.1, si tratta di provare che

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x_0).$$

In effetti, si ha $$\mathbf{f}(x) = \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + \mathbf{f}(x_0)$$

e dunque, poiché $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}$ esiste ed è un numero $\mathbf{f}'(x_0) \in \mathbb{R}$, si trova che

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + \mathbf{f}(x_0) \right) = \mathbf{f}'(x_0) \cdot 0 + \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{f}(x_0)$$

come si voleva.

Esempio 18.4.2

Sia $$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione **f** non è continua in $x_0 := 0$; il limite del rapporto incrementale esiste ed è uguale a $+\infty$.

Esempio 18.4.3

Sia $$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } \; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } \; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

La funzione **f** è derivabile solo in $x_0 := 0$, ed è continua solo in $x_0 := 0$.

18.5 - Funzione derivata. Derivazione.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ad ogni numero reale x in cui **f** è derivabile associa la derivata di **f** in x si dice *funzione derivata* della **f** (o anche, semplicemente, *derivata* della **f**) e si indica con **f'**. La (funzione) derivata di **f** porta dunque x in **f'**(x), coerentemente con la notazione stabilita in 18.2.

Il dominio di **f'** è il sottoinsieme di $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ formato dai punti in cui **f** è derivabile. Se $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}(\mathbf{f'})$, si dice che **f** è *derivabile in* **I**; se $\mathcal{D}(\mathbf{f'}) = \mathcal{D}(\mathbf{f})$, si dice che **f** è *derivabile*.

In 18.2 abbiamo visto che:

- la derivata di una funzione costante è la funzione costante uguale a zero;
- la derivata della funzione x^n è la funzione nx^{n-1};
- la derivata della funzione **sin**(x) è la funzione **cos**(x);
- la derivata della funzione **cos**(x) è la funzione $-$**sin**(x);
- la derivata della funzione e^x è la funzione e^x stessa;
- la derivata della funzione **ln**(x) è la restrizione a $\mathbb{R}^+$della funzione $\frac{1}{x}$;

ecc., ecc.. Lo studente è invitato a costruirsi una "tabella" con le derivate delle funzioni elementari (cfr. 15.1). Altre informazioni in questo senso saranno ricavabili dalla sezione 18.8.

I teoremi delle sezioni 18.6, 18.7 e 18.8, assieme alle informazioni raccolte in tale “tabella”, consentiranno di ottenere la derivata di ogni funzione che avremo occasione di considerare.

La funzione $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ che a ogni funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa la sua derivata si dice *derivazione*.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La funzione derivata della funzione derivata di **f** si dice *derivata seconda* di **f** e si indica col simbolo **f ”** (oppure $\mathbf{f}^{(2)}$). Più in generale, se n $\in \mathbb{N}$ si pone

$$\mathbf{f}^{(n)}(x) := (\mathbf{f}^{(n-1)})'(x).$$

La $\mathbf{f}^{(n)}(x)$ si dice *derivata* n*-sima* (o anche *derivata di ordine* n) di **f**. Se $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}(\mathbf{f}^{(n)})$, si dice che **f** è *derivabile* n *volte* in **I**; se $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}(\mathbf{f}^{(n)})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si dice che **f** è *derivabile infinite volte* in **I**.

Sia $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$. L’insieme delle funzioni derivabili in **I** si indica con $\mathfrak{D}(\mathbf{I})$. L’insieme delle funzioni derivabili n volte in **I** con derivata n-sima continua si indica con $\mathcal{C}^{(n)}(\mathbf{I})$ (si noti che, per il teorema 18.4.1, anche le derivate i-sime di tali funzioni sono continue per ogni $i < n$). L’insieme delle funzioni derivabili infinite volte in **I** (con derivate necessariamente tutte continue in **I** per il teorema 18.4.1) si indica con $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbf{I})$.

Se $\mathbf{I} = \{x_0\}$, si scrive rispettivamente $\mathfrak{D}(x_0)$, $\mathcal{C}^{(n)}(x_0)$ e $\mathcal{C}^{(\infty)}(x_0)$ anziché $\mathfrak{D}(\{x_0\})$, $\mathcal{C}^{(n)}(\{x_0\})$ e $\mathcal{C}^{(\infty)}(\{x_0\})$; se $\mathbf{I} = (a, b)$, si scrive $\mathfrak{D}(a, b)$ anziché $\mathfrak{D}((a, b))$.

18.6 - Compatibilità tra derivazione e operazioni tra funzioni.

Teorema 18.6.1

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$; siano **f**, $\mathbf{g} \in \mathfrak{D}(x_0)$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, $\lambda\mathbf{f} \in \mathfrak{D}(x_0)$ e si ha che

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(x_0) = \mathbf{f}'(x_0) + \mathbf{g}'(x_0)$$

$$(\lambda\mathbf{f})'(x_0) = \lambda \cdot \mathbf{f}'(x_0).$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Corollario 18.6.2

Sia $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$; siano **f**, $\mathbf{g} \in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, $\lambda\mathbf{f} \in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$ e si ha che

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}' \quad \text{e} \quad (\lambda\mathbf{f})' = \lambda \cdot \mathbf{f}'.$$

Teorema 18.6.3

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e siano **f**, **g** $\in \mathfrak{D}(x_0)$. Allora **fg** $\in \mathfrak{D}(x_0)$ e si ha

$$(\mathbf{fg})'(x_0) = \mathbf{f}'(x_0)\mathbf{g}(x_0) + \mathbf{f}(x_0)\mathbf{g}'(x_0).$$

Inoltre, se $\mathbf{g}(x_0) \neq 0$ è anche $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} \in \mathfrak{D}(x_0)$ e si ha

$$\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)'(x_0) = \frac{\mathbf{f}'(x_0)\mathbf{g}(x_0) - \mathbf{f}(x_0)\mathbf{g}'(x_0)}{(\mathbf{g}(x_0))^2}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Corollario 18.6.4

Sia $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$. $\mathfrak{D}(\mathbf{I})$ è un sottoanello di $\mathcal{F}(\mathbf{I})$, ma la derivazione non è un omomorfismo fra anelli (cfr. 8.5) di $\mathfrak{D}(\mathbf{I})$ in $\mathcal{F}(\mathbf{I})$. Se **f**, **g** $\in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$ si ha

$$(\mathbf{fg})' = \mathbf{f}'\mathbf{g} + \mathbf{f}\mathbf{g}'$$

e (purché sia $\mathbf{g}(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbf{I}$)

$$\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)' = \frac{\mathbf{f}'\mathbf{g} - \mathbf{f}\mathbf{g}'}{\mathbf{g}^2}.$$

Esercizio 18.6.5

Verificare, applicando le regole di derivazione per somma, prodotto e quoziente di funzioni, che:

– se $\mathbf{f}(x) := x^5 - 3x^4 + \pi x - 2$ si ha $\mathbf{f}'(x) = 5x^4 - 12x^3 + \pi$

– se $\mathbf{f}(x) := 2x^4 + 5x^2 - 3$ si ha $\mathbf{f}'(x) = 8x^3 + 10x$

– se $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}(x) + \mathbf{cos}(x) + \mathbf{tg}(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{cos}(x) - \mathbf{sin}(x) + \mathbf{tg}^2(x) + 1$

– se $\mathbf{f}(x) := \mathbf{tg}(x) + \frac{1}{\mathbf{tg}(x)}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = -\frac{\mathbf{cos}(2x)}{\mathbf{sin}^2(x)\mathbf{cos}^2(x)}$

– se $\mathbf{f}(x) := 2^x - \mathbf{log}_3(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = 2^x\,\mathbf{ln}(2) - \frac{1}{x \cdot \mathbf{ln}(3)}$

– se $\mathbf{f}(x) := x\mathbf{sin}(x) + \mathbf{cos}(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = x\mathbf{cos}(x)$

– se $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{cos}(2x)$

– se $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}^2(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \mathbf{sin}(2x)$

– se $\mathbf{f}(x) := x\mathbf{ln}(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = 1 + \mathbf{ln}(x)$

– se $\mathbf{f}(x) := e^x \mathbf{sin}(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = e^x(\mathbf{sin}(x) + \mathbf{cos}(x))$

– se $\mathbf{f}(x) := e^x \mathbf{cos}(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = e^x(\mathbf{cos}(x) - \mathbf{sin}(x))$

– se $\mathbf{f}(x) := x^2 2^x$ si ha $\mathbf{f}'(x) = x2^x(x\mathbf{ln}(2) + 2)$

– se $\mathbf{f}(x) := \frac{x^2-4}{x^2+4}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$

– se $\mathbf{f}(x) := \frac{x^2}{1-x}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

– se $\mathbf{f}(x) := \frac{9x+1}{5-3x}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \frac{48}{(5-3x)^2}$

– se $\mathbf{f}(x) := \frac{1}{\mathbf{cos}(x)}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \frac{\mathbf{tg}(x)}{\mathbf{cos}(x)}$

– se $\mathbf{f}(x) := \frac{e^x}{x^2}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

– se $\mathbf{f}(x) := \frac{1-e^x}{1+e^x}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$

18.7 - Derivata di funzione composta.

Teorema 18.7.1

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{f} \in \mathfrak{D}(x_0)$ e sia $\mathbf{g} \in \mathfrak{D}(\mathbf{f}(x_0))$. Allora $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} \in \mathfrak{D}(x_0)$, e si ha

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(x_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(x_0)) \cdot (\mathbf{f}'(x_0)).$$

Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esercizio 18.7.2

Dimostrare che:

– se $\mathbf{f}(x) := \sqrt{x^2 - 1}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

– se $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}(\mathbf{cos}(x))$ si ha $\mathbf{f}'(x) = -\mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(\mathbf{cos}(x))$

– se $\mathbf{f}(x) := \mathbf{sin}^4(x)$ si ha $\mathbf{f}'(x) = 4\mathbf{sin}^3(x)\mathbf{cos}(x)$

– se $\mathbf{f}(x) := (x^4 - 2x^3)^{23}$ si ha $\mathbf{f}'(x) = 23(x^4 - 2x^3)^{22}(4x^3 - 6x^2)$

– se $\mathbf{f}(x) := \mathbf{ln}\sqrt{\frac{1+\mathbf{sin}(x)}{1-\mathbf{sin}(x)}}$ si ha $\mathbf{f}\,'(x) = \frac{1}{\mathbf{cos}(x)}$

– se $\mathbf{f}(x) := \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$ si ha $\mathbf{f}\,'(x) = \frac{1}{9\sqrt[3]{x^2\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}$

– se $\mathbf{f}(x) := x^x$ si ha $\mathbf{f}\,'(x) = x^x(1+\mathbf{ln}(x))$

– se $\mathbf{f}(x) := x^{(x^x)}$ si ha $\mathbf{f}\,'(x) = x^{(x^x)}(x^x(\mathbf{ln}^2(x)+\mathbf{ln}(x))+x^{x-1})$

– se $\mathbf{f}(x) := e^{(e^x)}$ si ha $\mathbf{f}\,'(x) = e^{(e^x+x)}$

Esercizio 18.7.3

Perché è sbagliato affermare che la derivata della funzione $\mathbf{ln}(\mathbf{sin}(x))$ è la funzione $\frac{1}{\mathbf{tg}(x)}$?

Esercizio 18.7.4

Per ciascuna delle seguenti funzioni $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, si determini la funzione derivata:

- $\mathbf{f}_1(x) := \mathbf{ln}(\mathbf{cos}(x))$;
- $\mathbf{f}_2(x) := \mathbf{ln}(\mathbf{tg}(x))$;
- $\mathbf{f}_3(x) := \mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x))$.

18.8 - Derivata della funzione inversa.

Teorema 18.8.1

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, e sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione invertibile e derivabile in un intorno di x_0. Se $\mathbf{f}\,'(x_0) \neq 0$, la funzione inversa $\mathbf{f}^{-1}$ è derivabile in $\mathbf{f}(x_0)$, e si ha

$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{f}(x_0)) = \frac{1}{\mathbf{f}\,'(x_0)}.$$

Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempio 18.8.2

Ritroviamo applicando il teorema 18.8.1 il risultato già visto in 18.2.14 che esprime la derivata della funzione esponenziale e^x.

Posto $\mathbf{f}(x) := \mathbf{ln}(x)$, si ha $\mathbf{f}^{-1}(y) = e^y$.

Per 18.2.13 e 18.8.1, se $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha (posto $y_0 := \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{ln}(x_0)$, da cui $x_0 = \mathrm{e}^{y_0}$)

$$(\mathbf{f}^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\mathbf{f}'(x_0)}$$

ossia

$$\left.\frac{\mathrm{d}(e^y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}$$

come si attendeva.

Esempio 18.8.3

Applicando il teorema 18.8.1, calcoliamo la derivata delle funzioni circolari inverse.

Se $y_0 \in [-1, +1]$ si ha

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{arcsin}(y))}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{sin}(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}} = \frac{1}{\mathbf{cos}(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{sin}^2(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{arccos}(y))}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{cos}(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}} = \frac{1}{-\mathbf{sin}(x_0)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\mathbf{cos}^2(x_0)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ si ha poi

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{arctg}(y))}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}(\mathbf{tg}(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}} = \frac{1}{1+\mathbf{tg}^2(x_0)} = \frac{1}{1+y_0^2}$$

19.- ESTREMI LOCALI E TEOREMI CONNESSI

19.1 - Monotonia.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia **A** $\subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che **f** è

(*strettamente*) *crescente* in **A** se $(x < y) \Rightarrow (\mathbf{f}(x) < \mathbf{f}(y)) \quad \forall x, y \in \mathbf{A}$;

(*strettamente*) *decrescente* in **A** se $(x < y) \Rightarrow (\mathbf{f}(x) > \mathbf{f}(y)) \quad \forall x, y \in \mathbf{A}$;

non decrescente in **A** se $(x < y) \Rightarrow (\mathbf{f}(x) \le \mathbf{f}(y)) \quad \forall x, y \in \mathbf{A}$;

non crescente in **A** se $(x < y) \Rightarrow (\mathbf{f}(x) \ge \mathbf{f}(y)) \quad \forall x, y \in \mathbf{A}$.

Si dice che **f** è *monotòna* in **A** se è non crescente in **A** oppure non decrescente in **A**; si dice che **f** è *strettamente monotòna* in **A** se è (strettamente) crescente in **A** oppure (strettamente) decrescente in **A**.

Teorema 19.1.1

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia **A** $\subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Se **f** è strettamente monotòna in **A**, $\mathbf{f}|_{\mathbf{A}}$ è iniettiva (e quindi invertibile).

Dimostrazione — Dobbiamo provare che

$$x' \neq x'' \;\Rightarrow\; \mathbf{f}(x') \neq \mathbf{f}(x'') \qquad \forall x', x'' \in \mathbf{A}.$$

Supponiamo ad esempio che **f** sia crescente in **A**. Se $x' \neq x''$ sarà $x' < x''$ oppure $x' > x''$; nel primo caso si trova che $\mathbf{f}(x') < \mathbf{f}(x'')$, nel secondo caso che $\mathbf{f}(x') > \mathbf{f}(x'')$ e quindi comunque che $\mathbf{f}(x') \neq \mathbf{f}(x'')$.

Esempio 19.1.2

Sia **f** la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è razionale} \\ -x & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

La funzione **f** è iniettiva (e quindi invertibile), ma non è monotòna in alcun intervallo di numeri reali.

19.2 - Estremi locali.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Si dice che x_0 è un *punto di massimo locale* (oppure di *massimo relativo*) per **f** se esiste un intorno **I** di x_0 tale che $\mathbf{f}(x) \leq \mathbf{f}(x_0)$ per ogni $x \in \mathbf{I} \cap \mathcal{D}(\mathbf{f})$ (ossia tale che x_0 è un punto di massimo per la restrizione di **f** a **I**). Se esiste un intorno forato $\mathbf{I}_0$ di x_0 tale che $\mathbf{f}(x) < \mathbf{f}(x_0)$ per ogni $x \in \mathbf{I}_0 \cap \mathcal{D}(\mathbf{f})$, si dice che x_0 è un *punto di massimo locale proprio* (oppure di *massimo relativo proprio*) per **f** .

Si dice che x_0 è un *punto di minimo locale* (oppure di *minimo relativo*) per **f** se esiste un intorno **I** di x_0 tale che $\mathbf{f}(x) \geq \mathbf{f}(x_0)$ per ogni $x \in \mathbf{I} \cap \mathcal{D}(\mathbf{f})$ (ossia tale che x_0 è un punto di minimo per la restrizione di **f** a **I**). Se esiste un intorno forato $\mathbf{I}_0$ di x_0 tale che $\mathbf{f}(x) > \mathbf{f}(x_0)$ per ogni $x \in \mathbf{I}_0 \cap \mathcal{D}(\mathbf{f})$, si dice che x_0 è un *punto di minimo locale proprio* (oppure di *minimo relativo proprio*) per **f** .

Si dice infine che x_0 è un *punto estremante* [*proprio*], oppure un *punto di estremo locale* [*proprio*] se è un punto di minimo locale [proprio] oppure di massimo locale [proprio].

Osservazione 19.2.1

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si noti che, in base alla definizione, se x_0 è un punto isolato per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ (cfr. sez. 15.7) allora x_0 è un punto di estremo locale per **f** (in effetti, è punto di massimo locale e anche punto di minimo locale per **f**). Di conseguenza, la nozione di "punto estremante" ha interesse solo per i punti che sono di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Osservazione 19.2.2

I punti di massimo e minimo per **f** definiti in 15.5, se esistono, sono punti estremanti per **f**. Tuttavia **f** può avere punti di massimo (o di minimo) locale senza avere punti di massimo (o punti di minimo) (si consideri ad esempio $\mathbf{f}(x) := x^3 - 3x^2$).

Teorema 19.2.3

Sia (a, b) un intervallo aperto di numeri reali, sia $x_0 \in (a, b)$ e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(x_0)$.

Se **f** è non decrescente in (a, x_0) e non crescente in (x_0, b), allora x_0 è un punto di massimo locale per **f**; se **f** è non crescente in (a, x_0) e non decrescente in (x_0, b), allora x_0 è un punto di minimo locale per **f**.

Dimostrazione — Sia **f** non decrescente in (a, x_0) e non crescente in (x_0, b); proviamo che x_0 è un punto di massimo per la restrizione di **f** all'intervallo (a, b), ossia che

$$\boxed{\bigstar} \qquad \mathbf{f}(x) \leq \mathbf{f}(x_0) \qquad \forall\, x \in (a, b) \cap \mathcal{D}(\mathbf{f}).$$

Ne seguirà, per definizione, che x_0 è un punto di massimo locale per **f**. In modo del tutto analogo si prova la seconda parte dell'asserto.

Procediamo per assurdo. Se non vale la $\boxed{\bigstar}$, esiste $\overline{x} \in (a, b) \cap \mathcal{D}(\mathbf{f})$ tale che $\mathbf{f}(\overline{x}) > \mathbf{f}(x_0)$. Consideriamo la funzione

$$\mathbf{g}(x) := \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(\overline{x}).$$

Dall'ipotesi che **f** sia continua in x_0 segue subito che anche **g** è continua in x_0; poiché $\mathbf{g}(x_0) < 0$, per il teorema della permanenza del segno (16.2.3) esiste un intorno **I** di x_0 in cui **g** assume solo valori negativi.

Sarà $\overline{x} < x_0$ oppure $x_0 < \overline{x}$. Nel primo caso, scegliamo un x_1 in $(\overline{x}, x_0) \cap \mathbf{I} \cap \mathcal{D}(\mathbf{f})$ ([33]); si ha $\mathbf{g}(x_1) < 0$, ossia $\mathbf{f}(x_1) < \mathbf{f}(\overline{x})$, e ciò è assurdo perché $a < \overline{x} < x_1 < x_0$ e **f** è per ipotesi non decrescente in (a, x_0). Nel secondo caso, scegliamo un x_2 in $(x_0, \overline{x}) \cap \mathbf{I} \cap \mathcal{D}(\mathbf{f})$ ([34]); si ha $\mathbf{g}(x_2) < 0$, ossia $\mathbf{f}(x_2) < \mathbf{f}(\overline{x})$, e ciò è assurdo perché $x_0 < x_2 < \overline{x} < b$ e **f** è per ipotesi non crescente in (x_0, b). In ogni caso si è dunque raggiunto un assurdo; ciò prova che deve valere la $\boxed{\bigstar}$.

Esempio 19.2.4

La funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$, ma 0 non è punto estremante per **f**. Si noti che **f** presenta in 0 una singolarità non eliminabile.

[33] Possiamo supporre $(\overline{x}, x_0) \cap \mathbf{I} \cap \mathcal{D}(\mathbf{f}) \neq \emptyset$: infatti, in caso contrario $(\overline{x}, x_0) \cap \mathbf{I}$ sarebbe un intorno sinistro di x_0 al quale non appartengono punti del dominio di **f**; posto $(\overline{a}, x_0) := (\overline{x}, x_0) \cap \mathbf{I}$, si potrebbe allora sostituire $\overline{a}$ ad a nella dimostrazione ed escludere la possibilità che sia $\overline{x} < x_0$.

[34] Possiamo supporre $(x_0, \overline{x}) \cap \mathbf{I} \cap \mathcal{D}(\mathbf{f}) \neq \emptyset$; infatti, in caso contrario $(x_0, \overline{x}) \cap \mathbf{I}$ sarebbe un intorno destro di x_0 al quale non appartengono punti del dominio di **f**; posto $(x_0, \overline{b}) := (x_0, \overline{x}) \cap \mathbf{I}$, si potrebbe allora sostituire $\overline{b}$ a b nella dimostrazione ed escludere la possibilità che sia $x_0 < \overline{x}$.

Teorema 19.2.5 (Fermat)

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno al dominio di **f**.

Se **f** è derivabile in x_0, e x_0 è un punto di estremo locale per **f**, si ha **f '**$(x_0) = 0$.

Dimostrazione – Proviamo che se **f '**$(x_0) \neq 0$ allora x_0 non è un punto di estremo locale. Sia, per fissare le idee, **f '**$(x_0) > 0$. Consideriamo la funzione **g** definita in $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \setminus \{x_0\}$ ponendo

$$\mathbf{g}(x) := \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Per definizione di derivata, è

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = \mathbf{f}\,'(x_0) > 0.$$

Dunque, per il teorema 17.1.9, in un opportuno intorno forato di x_0 è $\mathbf{g}(x) > 0$, ossia

$$\frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Ma ciò significa che $\mathbf{f}(x) > \mathbf{f}(x_0)$ se $x > x_0$, e $\mathbf{f}(x) < \mathbf{f}(x_0)$ se $x < x_0$. Ne segue che x_0 non può essere né un punto di minimo locale né un punto di massimo locale.

Il teorema 19.2.5 afferma che **f '**$(x_0) = 0$ è condizione necessaria affinché x_0 sia un punto di estremo locale per **f**. Notiamo esplicitamente che tale condizione non è però sufficiente: ad esempio, la funzione $\mathbf{f}(x) := x^3$ non ha punti estremanti (è infatti crescente in $\mathbb{R}$), ma per essa si ha **f '**$(0) = 0$. Di fatto, la condizione **f '**$(x_0) = 0$ è compatibile con ogni tipo di comportamento della **f**. Ad esempio:

– sia $\mathbf{f}(x) := x^2$; per $x_0 := 0$, si ha **f '**$(x_0) = 0$ e x_0 per **f** è un punto di minimo locale;

– sia $\mathbf{f}(x) := -x^2$; per $x_0 := 0$, si ha **f '**$(x_0) = 0$ e x_0 per **f** è un punto di massimo locale;

– sia $\mathbf{f}(x) := x^3$; per $x_0 := 0$, si ha **f '**$(x_0) = 0$ e **f** è crescente in $\mathbb{R}$;

– sia $\mathbf{f}(x) := -x^3$; per $x_0 := 0$, si ha **f '**$(x_0) = 0$ e **f** è decrescente in $\mathbb{R}$;

– sia $\mathbf{f}(x) := x^2 \mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \neq 0$, $\mathbf{f}(0) := 0$; per $x_0 := 0$, si ha **f '**$(x_0) = 0$ ma x_0 per **f** non è un punto estremante e **f** non è monotòna in nessun intorno di x_0.

In sostanza, il teorema 19.2.5 ci dice che gli eventuali punti estremanti vanno cercati fra i punti che rientrano in una delle seguenti tre categorie:

– i punti che appartengono al dominio di **f** ma *non sono interni* al dominio di **f** (ad esempio, gli estremi degli intervalli chiusi che eventualmente formano il dominio di **f**);

– i punti interni al dominio di **f** in cui **f** non è derivabile;

– i punti interni al dominio di **f** in cui **f** è derivabile e la derivata di **f** è zero.

19.3 - Ricerca dei punti estremanti.

Teorema 19.3.1

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $[a, b] \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e **f** sia continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora:

- se **f'**$(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, **f** è non crescente in $[a, b]$;
- se **f'**$(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$, **f** è decrescente in $[a, b]$;
- se **f'**$(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, **f** è non decrescente in $[a, b]$;
- se **f'**$(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, **f** è crescente in $[a, b]$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempio 19.3.2

Sia $\mathbf{f}(x) := x^2$, cosicché **f'**$(x_0) = 2x_0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Si deduce dal teorema 19.3.1 che **f** è decrescente in $(-\infty, 0)$ e crescente in $(0, +\infty)$; ne segue fra l'altro che 0 è un punto di minimo per **f**.

Esercizio 19.3.3

Sia $\mathbf{f}(x) := ax^2 + bx + c$ con a, b, c numeri reali. Stabilire, in dipendenza di a, b, c, in quali intervalli **f** è crescente e in quali è decrescente; determinare, sempre in dipendenza di a, b, c, gli eventuali punti estremanti di **f**. Tenendo conto anche di quanto visto in 18.4, disegnare il grafico di **f** per

$a := \pi,\ b := -1,\ c := 0;$

$a := -2,\ b := 0,\ c := 1;$

$a := 0,\ b := 2,\ c := -1;$

$a := -1,\ b := 2,\ c := 0.$

Esercizi

Dire in quali intervalli risultano crescenti e in quali intervalli risultano decrescenti le seguenti funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

19.3.4 $x(x^2+1)$;

19.3.5 x^4;

19.3.6 x^n (al variare di $n \in \mathbb{N}$);

19.3.7 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$;

19.3.8 $x^3(x-2)$;

19.3.9 $\frac{x}{1-x^2}$;

Osservazione 19.3.10

Sia $\mathbf{f} \in \mathrm{C}^{\infty}(a, b)$, e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $\mathbf{f}'(x_0) = 0$. Abbiamo osservato dopo la dimostrazione del teorema di Fermat (19.2.5) che senza altre informazioni non possiamo stabilire se x_0 è un punto estremante né (nel caso che lo sia) se è un punto di massimo o di minimo.

In base al teorema 19.2.3 si ha però che:

– se **f** è non decrescente in un intorno sinistro di x_0 e non crescente in un intorno destro di x_0, x_0 è un punto di massimo locale per **f**;

– se **f** è non crescente in un intorno sinistro di x_0 e non decrescente in un intorno destro di x_0, x_0 è un punto di minimo locale per **f**.

Per il teorema 19.3.1 si può allora affermare che:

– se la derivata di **f** è ≥ 0 in un intorno sinistro di x_0 e ≤ 0 in un intorno destro di x_0, x_0 è un punto di massimo locale per **f**;

– se la derivata di **f** è ≤ 0 in un intorno sinistro di x_0 e ≥ 0 in un intorno destro di x_0, x_0 è un punto di minimo locale per **f**.

D'altro lato, informazioni sul comportamento della funzione derivata **f'** possono essere ricavate studiando la derivata di **f'**, cioè la "derivata seconda" **f''** di **f**. Infatti:

– se $\mathbf{f}''(x_0) < 0$, allora **f''** è negativa in un intorno di x_0 (per il teorema di permanenza del segno, 16.2.3, essendo per ipotesi **f''** continua in (a, b)) e quindi **f'** è decrescente in tale intorno (per il teorema 19.3.1); dunque (essendo per ipotesi $\mathbf{f}'(x_0) = 0$) **f'** è positiva in un intorno sinistro di x_0 e negativa in un intorno destro di x_0, e quindi x_0 è un punto di massimo locale;

– se $\mathbf{f}''(x_0) > 0$, allora **f''** è positiva in un intorno di x_0 e quindi **f'** è crescente in tale intorno; dunque **f'** è negativa in un intorno sinistro di x_0 e positiva in un intorno destro di x_0, e quindi x_0 è un punto di minimo locale;

– se $\mathbf{f}''(x_0) = 0$, si possono ottenere informazioni utili esaminando $\mathbf{f}^{(3)}(x_0)$. Sia ad esempio $\mathbf{f}^{(3)}(x_0) > 0$: allora $\mathbf{f}^{(3)}$ è positiva in un intorno di x_0; ne segue che **f''** è crescente in tale intorno, quindi negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra di x_0; dunque **f'** è decrescente in un intorno sinistro di x_0 e crescente in un intorno destro di x_0, cioè è positiva in un intorno di x_0; allora **f** è crescente in tale intorno, quindi x_0 non è un punto estremante. Analogamente si vede che, se $\mathbf{f}^{(3)}(x_0) < 0$, **f** è decrescente in un intorno di x_0, e quindi x_0 non è un punto estremante. Se è anche $\mathbf{f}^{(3)}(x_0) = 0$, si può considerare $\mathbf{f}^{(4)}(x_0)$, e così via.

Ragionando analogamente e procedendo per induzione, si dimostra il

Teorema 19.3.11

Sia **f** $\in \mathrm{C}^\infty(a, b)$, e sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che in x_0 si annullino le prime n derivate di **f**, e sia invece $\mathbf{f}^{(n+1)}(x_0) = \alpha \neq 0$.

Se n è dispari, x_0 è un punto estremante, e precisamente: un punto di massimo se $\alpha < 0$, un punto di minimo se $\alpha > 0$.

Se n è pari, **f** è strettamente monotòna in un intorno di x_0, e precisamente: è crescente se $\alpha > 0$, decrescente se $\alpha < 0$.

Esercizi

Determinare i punti estremanti, specificando se si tratta di punti di massimo o punti di minimo, locali o assoluti, per ciascuna delle seguenti funzioni:

19.3.12 $x^5 - 6x^3 - 8x - 1$;

19.3.13 $x^5 - x^4$;

19.3.14 $x^3 - 3x^2 + 1$;

19.3.15 $\frac{x+1}{x-1}$;

19.3.16 $\mathbf{sin}(x) + \mathbf{cos}(x)$;

19.3.17 $x + x^{\frac{2}{3}}$;

19.3.18 $\mathbf{ln}(\sqrt{x} - x)$;

19.3.19 $\mathbf{ln}(\mathbf{sin}(x))$.

Esercizio 19.3.20

Fra tutti i rettangoli di area 100 determinare quelli di perimetro minimo.

Esercizio 19.3.21

Fra tutti i rettangoli di perimetro 100 determinare quelli di area massima.

Esercizio 19.3.22

Fra tutti i trapezi isosceli in cui la base minore misura 1 e il perimetro è 14 determinare quelli di area massima.

Esercizio 19.3.23

Fra tutti i settori circolari di perimetro 20 determinare quelli di area massima.

Esercizio 19.3.24

Un poligono si dice *inscritto* in una ellisse se tutti i suoi vertici sono punti dell'ellisse. Fra tutti i rettangoli inscritti in una data ellisse determinare che lati ha quello di area massima.

Suggerimento: Si riferisca il piano a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico disposto "astutamente" rispetto all'ellisse.

Esercizio 19.3.25

Riferito il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico positivamente orientato **O*xy***, è data la curva algebrica $\mathbf{\Gamma}$ di equazione $2x^2 - 3x + y - 2 = 0$.
Siano **A** e **B** i punti in cui $\mathbf{\Gamma}$ incontra l'asse delle ordinate e il semiasse positivo delle ascisse. Fra i punti **P** di $\mathbf{\Gamma}$ che giacciono nel primo quadrante, determinare quelli per i quali l'area del poligono **OAPB** è massima e quelli per i quali l'area dello stesso poligono **OAPB** è minima.

20.- LE REGOLE DI DE L'HÔPITAL

20.1 - Introduzione.

In questo capitolo sono riportate alcune regole pratiche spesso utili per il calcolo di limiti che si presentano nelle forme "non immediate" (cfr. sez. 17.10). Esse sono note come "regole di de l'Hôpital", ma sono dovute a J. Bernoulli (1667-1748). In effetti, il marchese G. de l'Hôpital (1661-1704) assunse come precettore Bernoulli stipulando un contratto col quale costui si impegnava a comunicargli le proprie scoperte matematiche (fra le quali i teoremi che giustificano queste regole). De l'Hôpital, che aveva ottime doti di divulgatore, scrisse poi un libro (forse il primo testo di calcolo differenziale concepito come tale) nel quale riportava tali teoremi. Benché de l'Hôpital non si attribuisse esplicitamente la loro paternità, questi risultati sono da allora noti ovunque col suo nome. Pare che la cosa non abbia fatto piacere a Bernoulli, che l'accusò, senza esito, di plagio.

20.2 - La forma "non immediata" $\frac{0}{0}$.

Teorema 20.2.1 (J. Bernoulli) ("regola di de l'Hôpital per $\frac{0}{0}$, $x \to x_0$")

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ e per $\mathcal{D}(\mathbf{g})$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = 0.$$

Supponiamo che esista un intorno forato di x_0 nel quale **f** e **g** sono derivabili e nel quale la derivata di **g** non è mai nulla. Se esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}'(x)}{\mathbf{g}'(x)} = \mathrm{L} \quad \text{con } \mathrm{L} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)} = \mathrm{L}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempio 20.2.2
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathbf{sin}(x)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Dimostrazione — Poiché

$$\lim_{x\to 0}(x-\mathbf{sin}(x)) = 0-\mathbf{sin}(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} x^3 = 0^3 = 0$$

possiamo cercare di applicare il teorema 20.2.1 considerando il limite del quoziente tra la derivata del numeratore e la derivata del denominatore. Avendosi (ricordando 17.4.1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathbf{cos}(x)}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathbf{cos}(x)}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

anche il limite proposto vale $\frac{1}{6}$.

Teorema 20.2.3 (J. Bernoulli) (“regola di de l’Hôpital per $\frac{0}{0}$, $x \to +\infty$”)

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite in un intervallo aperto illimitato a destra (cfr. 5.3), e sia

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathbf{g}(x) = 0.$$

Supponiamo che esista un intervallo aperto illimitato a destra nel quale **f** e **g** sono derivabili e nel quale la derivata di **g** non è mai nulla. Se esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}'(x)}{\mathbf{g}'(x)} = \mathrm{L} \qquad \text{con } \mathrm{L} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$$

allora si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)} = \mathrm{L}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 20.2.4 (J. Bernoulli) (“regola di de l’Hôpital per $\frac{0}{0}$, $x \to -\infty$”)

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite in un intervallo aperto illimitato a sinistra (cfr. 5.3), e sia

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{f}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathbf{g}(x) = 0.$$

Supponiamo che esista un intervallo aperto illimitato a sinistra nel quale **f** e **g** sono derivabili e nel quale la derivata di **g** non è mai nulla. Se esiste

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathbf{f}'(x)}{\mathbf{g}'(x)} = \mathrm{L} \qquad \text{con } \mathrm{L} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$$

allora si ha
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)} = \mathrm{L}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

20.3 - La forma “non immediata” $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 20.3.1 (J. Bernoulli) (“regola di de l’Hôpital per $\frac{\infty}{\infty}$, $x \to x_0$”)

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ e per $\mathcal{D}(\mathbf{g})$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to x_0} \mathbf{g}(x) = \pm\infty.$$

Supponiamo che esista un intorno forato di x_0 nel quale **f** e **g** sono derivabili e nel quale la derivata di **g** non è mai nulla. Se esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}'(x)}{\mathbf{g}'(x)} = \mathrm{L} \qquad \text{con } \mathrm{L} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)} = \mathrm{L}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempio 20.3.2
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\mathbf{ln}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\mathbf{tg}(x)} = +\infty.$$

Dimostrazione — Si ha

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \mathbf{ln}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \lim_{y \to 0^+} \mathbf{ln}(y) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \mathbf{tg}(x) = +\infty$$

avendo posto nel primo limite $y := \frac{\pi}{2} - x$ per poi applicare il teorema 17.3.4. Possiamo dunque cercare di utilizzare il teorema 20.3.1, considerando il limite del quoziente tra la derivata del numeratore e la derivata del denominatore. Si ha

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}}{\frac{1}{\mathbf{cos}^2(x)}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\mathbf{cos}^2(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\mathbf{sin}^2(y)}{-y} = \lim_{y \to 0^+} -\mathbf{sin}(y) \frac{\mathbf{sin}(y)}{y} = 0$$

avendo posto $y := \frac{\pi}{2} - x$ (da cui $x = \frac{\pi}{2} - y$) per poi applicare il teorema 17.3.4, e tenendo conto del “limite notevole” 17.1.4. Pertanto, anche il limite proposto vale $+\infty$.

Teorema 20.3.3 (J. Bernoulli) ("regola di de l'Hôpital per $\frac{\infty}{\infty}$, $x \to +\infty$")

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite in un intervallo aperto illimitato a destra (cfr. 5.3), e sia

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathbf{g}(x) = \pm\infty.$$

Supponiamo che esista un intervallo aperto illimitato a destra nel quale **f** e **g** sono derivabili e nel quale la derivata di **g** non è mai nulla. Se esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}'(x)}{\mathbf{g}'(x)} = \mathrm{L} \quad \text{con } \mathrm{L} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

allora si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)} = \mathrm{L}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempio 20.3.4 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{ln}(x)}{x} = 0.$$

Dimostrazione — Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{ln}(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

possiamo cercare di applicare il teorema 20.3.3 considerando il limite del quoziente tra la derivata del numeratore e la derivata del denominatore. Avendosi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

anche il limite proposto vale 0 .

Esempio 20.3.5 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Dimostrazione — Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

possiamo cercare di applicare il teorema 20.3.3 considerando il limite del quoziente tra la derivata del numeratore e la derivata del denominatore. Avendosi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

anche il limite proposto vale $+\infty$.

Teorema 20.3.6 (J. Bernoulli) ("regola di de l'Hôpital per $\frac{\infty}{\infty}$, $x \to -\infty$")

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite in un intervallo aperto illimitato a sinistra (cfr. 5.3), e sia

$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{f}(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathbf{g}(x) = \pm\infty.$$

Supponiamo che esista un intervallo aperto illimitato a sinistra nel quale **f** e **g** sono derivabili e nel quale la derivata di **g** non è mai nulla. Se esiste

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathbf{f}'(x)}{\mathbf{g}'(x)} = \mathrm{L} \quad \text{con } \mathrm{L} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

allora si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)} = \mathrm{L}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Osservazione 20.3.7

La forma $\frac{\infty}{\infty}$ è facilmente riconducibile alla $\frac{0}{0}$: basta scrivere

$$\frac{\frac{1}{\mathbf{g}(x)}}{\frac{1}{\mathbf{f}(x)}} \quad \text{anziché} \quad \frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)} .$$

Per questo motivo, potrebbe sembrare superfluo enunciare e dimostrare teoremi del tipo di 20.3.1. Si noti però che derivando le $\frac{1}{\mathbf{f}}$ e $\frac{1}{\mathbf{g}}$ può accadere che si ottenga un'espressione più complicata di quella di partenza (es.: $\mathbf{f}(x) := e^x$, $\mathbf{g}(x) := x$): è dunque senz'altro opportuno avere regole che permettano di affrontare direttamente la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

20.4 - Le forme $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞. La forma $\infty - \infty$.

Non esistono "regole di de l'Hôpital" per le forme $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞, ma queste sono generalmente riconducibili alla $\frac{0}{0}$ e/o alla $\frac{\infty}{\infty}$; infatti

$$\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) = \frac{\mathbf{f}(x)}{\frac{1}{\mathbf{g}(x)}} = \frac{\mathbf{g}(x)}{\frac{1}{\mathbf{f}(x)}}$$

e

$$\mathbf{f}(x)^{\mathbf{g}(x)} = e^{\mathbf{g}(x) \cdot \ln(\mathbf{f}(x))} = e^{\frac{\mathbf{g}(x)}{\frac{1}{\ln(\mathbf{f}(x))}}} = e^{\frac{\ln(\mathbf{f}(x))}{\frac{1}{\mathbf{g}(x)}}} .$$

Naturalmente sarà necessario volta per volta verificare se le funzioni $\frac{1}{\mathbf{f}(x)}$, $\frac{1}{\mathbf{g}(x)}$, $\frac{1}{\mathbf{ln}(\mathbf{f}(x))}$ sono definite in un intorno di x_0 ($x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, se si sta considerando il limite di **f** per x che tende a x_0) e se sono verificate tutte le ipotesi delle regole di de l'Hôpital.

Anche la forma $\infty - \infty$ è riconducibile alla forma $\frac{0}{0}$; infatti si ha

$$\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x) = \frac{\frac{1}{\mathbf{g}(x)} - \frac{1}{\mathbf{f}(x)}}{\frac{1}{\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)}}.$$

Una tale trasformazione è però raramente conveniente.

$\boxed{\text{Esempio 20.4.1}}$

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \mathbf{ln}(x) = 0$$

Dimostrazione — Il limite proposto si presenta nella forma $0 \cdot \infty$. Si ha

$$x \cdot \mathbf{ln}(x) = \frac{\mathbf{ln}(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Poiché le funzioni $\mathbf{ln}(x)$ e $\dfrac{1}{x}$ verificano le ipotesi del teorema 20.3.1, possiamo considerare il

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = 0.$$

Dunque il limite proposto vale 0.

$\boxed{\text{Esempio 20.4.2}}$ $$\lim_{x\to +\infty} e^x \cdot \mathbf{ln}\left(\frac{x+1}{x}\right) = +\infty.$$

Dimostrazione — Il limite proposto si presenta nella forma $\infty \cdot 0$. Si ha

$$e^x \cdot \mathbf{ln}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{\mathbf{ln}\left(\frac{x+1}{x}\right)}{e^{-x}}.$$

Applicando il teorema 20.2.3, si è ricondotti a considerare il

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2+x}.$$

Questo nuovo limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$; applicando due volte la regola di de l'Hôpital per $\frac{\infty}{\infty}$, $x \to +\infty$, si considera il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x+1}$$

e poi il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2}.$$

Poiché quest'ultimo limite vale $+\infty$, anche il limite proposto vale $+\infty$.

$\boxed{\text{Esempio 20.4.3}}$ $$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\tfrac{\pi}{2} - \mathbf{arctg}(x)\right) = 1$$

Dimostrazione — Il limite proposto si presenta nella forma $\infty \cdot 0$. Si ha

$$x \cdot \left(\tfrac{\pi}{2} - \mathbf{arctg}(x)\right) = \frac{\frac{\pi}{2} - \mathbf{arctg}(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Poiché le funzioni $\frac{\pi}{2} - \mathbf{arctg}(x)$ e $\frac{1}{x}$ verificano le ipotesi del teorema 20.2.3, possiamo considerare il limite del quoziente delle derivate, ossia

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Dunque il limite proposto vale 1.

$\boxed{\text{Esempio 20.4.4}}$ $$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

Dimostrazione — Il limite proposto si presenta nella forma 0^0. Si ha $x^x = e^{x \cdot \mathbf{ln}(x)}$ e poiché abbiamo già visto (esempio 20.4.1) che

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \mathbf{ln}(x) = 0$$

si può concludere che il limite proposto vale 1.

$\boxed{\text{Esempio 20.4.5}}$ $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

Dimostrazione — Si ha $\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ e dunque il limite proposto si presenta nella forma ∞^0. Si ha

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \mathbf{ln}(x)} = e^{\frac{\mathbf{ln}(x)}{x}}$$

cosicché il limite proposto vale 1 (cfr. esempio 20.3.4).

Esempio 20.4.6 $\qquad \lim_{x\to 0} (\mathbf{cos}(x))^{\frac{1}{\mathbf{tg}(x)}} = 1$

Dimostrazione — Il limite proposto si presenta nella forma 1^{∞}. Si ha

$$(\mathbf{cos}(x))^{\frac{1}{\mathbf{tg}(x)}} = e^{\frac{1}{\mathbf{tg}(x)} \cdot \mathbf{ln}(\mathbf{cos}(x))} = e^{\frac{\mathbf{ln}(\mathbf{cos}(x))}{\mathbf{tg}(x)}}$$

e quindi siamo ricondotti a calcolare il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{ln}(\mathbf{cos}(x))}{\mathbf{tg}(x)}.$$

Poiché le funzioni $\mathbf{ln}(\mathbf{cos}(x))$ e $\mathbf{tg}(x)$ verificano le ipotesi del teorema 20.3.1, possiamo considerare il limite del quoziente delle derivate, ossia

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)}}{\frac{1}{(\mathbf{cos}(x))^2}} = \lim_{x\to 0} (- \mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(x)) = - \mathbf{sin}(0)\mathbf{cos}(0) = 0.$$

Dunque il limite proposto vale 1.

20.5 - Esercizi di riepilogo sull'uso delle regole di de l'Hôpital.

Per ciascuno dei seguenti limiti si verifichi l'applicabilità delle regole di de l'Hôpital e, quando possibile, si utilizzino tali regole per calcolare i limiti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{tg}(x)-x}{x-\mathbf{sin}(x)} \; ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1+\mathbf{sin}(x)-\mathbf{cos}(x)}{1-\mathbf{sin}(x)-\mathbf{cos}(x)} \; ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(2x)} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathbf{sin}(x)} \; ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{1-\mathbf{cos}(\sqrt{x})} \; ; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2}{x-1} \; ;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathbf{ln}(2x+1)}{\mathbf{ln}(x)} \; ; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\mathbf{sin}(x)}{x} \; ; \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathbf{tg}(x)}{\mathbf{ln}(\mathbf{cos}(x))} \; ;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\mathbf{sin}(x)}{x+\mathbf{sin}(x)} \; ; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \; ; \qquad \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \mathbf{ln}(x) \cdot \mathbf{ln}(1+x) \; ; \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} \right) \; ; \qquad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \mathbf{ln}(x) \right) \; ;$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\mathbf{cos}(x)} - \frac{2}{x^2} \right) \; ; \; \lim_{x\to 0^+} x^{\mathbf{sin}(x)} \; ; \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\mathbf{ln}(x)}} \; ;$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(x)}} \; .$$

21.- CONVESSITÀ

21.1 - Funzioni convesse.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $[a, b] \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che **f** è *convessa* in $[a, b]$ se comunque presi $x_0, x_1 \in [a, b]$ l'arco del grafico passante per i punti $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$ e $\mathbf{P}_1 \equiv (x_1, \mathbf{f}(x_1))$ "sta sotto" il segmento ("corda") $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Vediamo come si può esprimere con precisione questo concetto.

Sappiamo (teorema 13.8.1) che la retta $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ ha equazione

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-\mathbf{f}(x_0)}{\mathbf{f}(x_1)-\mathbf{f}(x_0)}$$

ossia
$$y = \frac{x_1-x}{x_1-x_0}\mathbf{f}(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\mathbf{f}(x_1)$$

e dunque la condizione di convessità in $[a, b]$ si può esprimere così:

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $[a, b] \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che **f** è *convessa* in $[a, b]$ se comunque presi $x_0, x_1 \in [a, b]$ con $x_0 < x_1$ si ha

F21.1.1
$$\mathbf{f}(x) \leq \frac{x_1-x}{x_1-x_0}\mathbf{f}(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\mathbf{f}(x_1) \qquad \forall x \in [x_0, x_1].$$

Se $x \in [x_0, x_1]$, è $x = x_0 + t(x_1 - x_0) = (1-t)x_0 + tx_1$ con $t \in [0, 1]$; spesso perciò, osservando che $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = t$ e $\frac{x_1-x}{x_1-x_0} = 1-t$, la F21.1.1 si scrive

F21.1.2
$$\mathbf{f}((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)\mathbf{f}(x_0) + t\mathbf{f}(x_1) \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Teorema 21.1.1

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia (a, b) un intervallo aperto contenuto nel dominio di **f**. Se **f** è convessa in (a, b), allora **f** è continua in (a, b).

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esempio 21.1.2

Sia
$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

La funzione **f** è convessa in $[0, 1]$ ma non è continua in 0.

21.2 - Criteri di convessità per le funzioni derivabili.

Teorema 21.2.1

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b). Sono fatti equivalenti:

(i) **f** è convessa in $[a, b]$.

(ii) comunque presi $x_0, x \in (a, b)$ si ha $\mathbf{f}(x) \geq \mathbf{f}'(x_0)(x - x_0) + \mathbf{f}(x_0)$

(cioè, la tangente al grafico in $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$ -cfr. 18.3- "sta sotto" l'arco del grafico relativo all'intervallo (a, b));

(iii) la funzione derivata **f '** è non decrescente in (a, b).

Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 21.2.2

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b). Se $\mathbf{f}''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, la funzione **f** è convessa in $[a, b]$.

Dimostrazione – Segue subito da 19.3.1 e da 21.2.1.

21.3 - Funzioni concave.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $[a, b] \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che **f** è *concava* in $[a, b]$ se comunque presi $x_0, x_1 \in [a, b]$ l'arco del grafico passante per i punti $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$ e $\mathbf{P}_1 \equiv (x_1, \mathbf{f}(x_1))$ "sta sopra" il segmento ("corda") $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, ossia se comunque presi $x_0, x_1 \in [a, b]$ con $x_0 < x_1$ si ha

F21.3.1 $$\mathbf{f}((1-t)x_0 + tx_1) \geq (1-t)\mathbf{f}(x_0) + t\mathbf{f}(x_1) \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Teorema 21.3.1

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $[a, b] \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. La funzione **f** è concava in $[a, b]$ se e solo se la funzione $-\mathbf{f}$ è convessa in $[a, b]$.

Dimostrazione – Ovvio.

Dal teorema 21.3.1 si ottengono gli analoghi dei risultati 21.2.1 e 21.2.2:

Teorema 21.3.2

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b). Sono fatti equivalenti:

(i) **f** è concava in $[a, b]$.

(ii) comunque presi $x_0, x \in (a, b)$ si ha $\mathbf{f}(x) \leq \mathbf{f}'(x_0)(x - x_0) + \mathbf{f}(x_0)$

(cioè, la tangente al grafico in $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$ -cfr. 18.3- "sta sopra" l'arco del grafico relativo all'intervallo (a, b));

(iii) la funzione derivata **f '** è non crescente in (a, b).

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 21.3.3

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b). Se $\mathbf{f}''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, la funzione **f** è concava in $[a, b]$.

21.4 - Punti di flesso.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice che x_0 è un *punto di flesso* per **f** (oppure che $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$ è un *flesso* per il grafico di **f**) se **f** è convessa in un intorno sinistro di x_0 e concava in un intorno destro di x_0, o viceversa.

Teorema 21.4.1

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto interno a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$, ed esista un intorno **J** di x_0 tale che $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathbf{J})$ (cfr. 18.5). Allora $\mathbf{f}''(x_0) = 0$
è condizione necessaria affinché x_0 sia un punto di flesso per **f**.

Dimostrazione — Supponiamo che x_0 sia un punto di flesso per **f**. Se fosse $\mathbf{f}''(x_0) = \alpha \neq 0$, in un intorno **I** di x_0 (contenuto in **J**) **f ''** sarebbe sempre positiva (o sempre negativa) per il teorema 16.2.3, e dunque (per 21.2.2 e 21.3.3) **f** sarebbe convessa (o concava) in tutto **I**, contro l'ipotesi che x_0 sia un punto di flesso.

Osservazione 21.4.2

La funzione $\mathbf{f}(x) := x^4$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$, quindi non ha punti di flesso; tuttavia $\mathbf{f}''(0) = 0$. Dunque la $\mathbf{f}''(x_0) = 0$ non è condizione sufficiente affinché x_0 sia un punto di flesso per **f**.

Osservazione 21.4.3

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di flesso per **f**; sia $\mathbf{P}_0 \equiv (x_0, \mathbf{f}(x_0))$ il corrispondente flesso nel grafico di **f** e supponiamo, per fissare le idee, che **f** sia convessa in un intorno sinistro di x_0 e concava in un intorno destro di x_0.

Se **f** è derivabile in un intorno di x_0, per il teorema 21.2.1 c'è un intorno sinistro di x_0 in cui la tangente al grafico di **f** "sta sotto" il relativo arco del grafico, e per il teorema 21.3.1 c'è un intorno destro di x_0 in cui la tangente al grafico di **f** "sta sopra" il relativo arco del grafico. Si potrebbe dimostrare che la tangente in $\mathbf{P}_0$ al grafico di **f** "sta sotto" l'arco del grafico in un intorno sinistro e "sta sopra" l'arco del grafico in un intorno destro di x_0: ciò si esprime di solito dicendo che la tangente in $\mathbf{P}_0$ *attraversa* il grafico di **f**.

Analoga a questa è la situazione che abbiamo visto nell'osservazione 18.3.7; si noti che tale situazione si verifica anche ogni volta che la derivata di **f** in x_0 è $+\infty$ oppure $-\infty$.

Teorema 21.4.4

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di flesso per **f**. Se **f** è derivabile in un intorno di x_0, allora x_0 non può essere punto estremante per **f**.

Dimostrazione — Supponiamo, per fissare le idee, che **f** sia convessa in un intorno sinistro di x_0 e concava in un intorno destro di x_0: allora **f '** è non decrescente in un intorno sinistro di x_0 e non crescente in un intorno destro di x_0. Se x_0 fosse un punto estremante per **f**, per il teorema 19.2.5 sarebbe $\mathbf{f}'(x_0) = 0$: allora, per quanto appena visto, in tutto un intorno di x_0 sarebbe $\mathbf{f}'(x) \leq 0$, ossia (per il teorema 19.3.1) **f** non crescente; e dunque x_0 non potrebbe essere punto estremante per **f**.

Esempio 21.4.5

Sia $\mathbf{f} := \frac{|x|}{x-1}$. Il punto 0 è punto di flesso e anche punto di minimo locale per **f**. Si noti che **f** non è derivabile in 0.

Esercizi

Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare, se possibile, gli intervalli in cui è concava o convessa e gli eventuali punti di flesso.

21.4.6	$\mathbf{f}(x) := e^x$;	21.4.7	$\mathbf{f}(x) := x^3$;
21.4.8	$\mathbf{f}(x) := x^3 - 6x^2 + 2x - 1$;	21.4.9	$\mathbf{f}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
21.4.10	$\mathbf{f}(x) := x^4 - 5x^2 + 4$;	21.4.11	$\mathbf{f}(x) := x \cdot \lvert x \rvert$.

22.- ASINTOTI

22.1 - Asintoti destri e asintoti sinistri.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in un intervallo illimitato a destra. La retta ***a*** di equazione $$y = px + q$$
si dice un *asintoto destro* per il grafico di **f** (o, più brevemente, per **f**) se

$$\lim_{x \to +\infty} (\mathbf{f}(x) - (px + q)) = 0$$

cioè se la differenza tra le ordinate dei punti aventi uguale ascissa appartenenti al grafico della **f** e alla retta ***a*** tende a zero al tendere dell'ascissa a $+\infty$.

Se **f** è definita in un intervallo illimitato a sinistra, la retta ***a*** di equazione $y = px + q$ si dice invece un *asintoto sinistro* per il grafico di **f** (o, più brevemente, per **f**) se $$\lim_{x \to -\infty} (\mathbf{f}(x) - (px + q)) = 0$$
cioè se la differenza tra le ordinate dei punti aventi uguale ascissa appartenenti al grafico della **f** e alla retta ***a*** tende a zero al tendere dell'ascissa a $-\infty$.

Teorema 22.1.1

Condizione necessaria e sufficiente affinché la retta di equazione $y = px + q$ sia un asintoto destro [sinistro] per **f** è che sia

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = p, \qquad \lim_{x \to +\infty} (\mathbf{f}(x) - px) = q$$

$$\left[\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = p, \qquad \lim_{x \to -\infty} (\mathbf{f}(x) - px) = q \quad \right].$$

Dimostrazione — Proviamo l'asserto per gli asintoti destri.

Poiché $\lim_{x \to +\infty} (\mathbf{f}(x) - px) = q$ equivale a $\lim_{x \to +\infty} (\mathbf{f}(x) - (px + q)) = 0$,

dobbiamo solo provare che

$$(y = px + q \quad \text{asintoto per } \mathbf{f}) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = p \right).$$

In effetti, sia $$\lim_{x \to +\infty} (\mathbf{f}(x) - (px + q)) = 0.$$

Allora $$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{f}(x) - px - q}{x} = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} \right) - p - \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{q}{x} \right)$$

da cui l'asserto perché $\lim_{x \to +\infty} \frac{q}{x} = 0$.

Esempio 22.1.2

Sia $\mathbf{f}(x) := e^{-x}\mathbf{sin}(x)$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \cdot \frac{\mathbf{sin}(x)}{x} = \left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{sin}(x)}{x}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

e
$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(x) = 0$$

cosicché l'asse delle ascisse è un asintoto destro per **f**.

Invece, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} \quad \left(= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} \cdot \mathbf{sin}(x)\right)\right)$ non esiste, e dunque **f** non ha asintoti sinistri.

Esempio 22.1.3

Sia $\mathbf{f}(x) := \mathbf{ln}(x) + x$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{ln}(x)+x}{x} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{ln}(x)}{x}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

ma
$$\lim_{x\to+\infty} (\mathbf{f}(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \mathbf{ln}(x) = +\infty$$

cosicché **f** non ha asintoti destri.

Un asintoto (destro o sinistro) si dice *orizzontale* se il suo coefficiente angolare è zero, *obliquo* altrimenti. È chiaro che

Teorema 22.1.4

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $k \in \mathbb{R}$.

La retta di equazione $y = k$ è un asintoto orizzontale destro [sinistro] per **f** se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(x) = k \qquad \left[\ \lim_{x\to-\infty} \mathbf{f}(x) = k\ \right].$$

22.2 - Asintoti verticali.

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$. La retta di equazione
$$x = x_0$$
si dice un *asintoto verticale* per il grafico di **f** (o, più brevemente, per **f**) se si verifica (almeno) una delle seguenti situazioni:

$$\lim_{x \to x_0^-} \mathbf{f}(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0^+} \mathbf{f}(x) = +\infty$$

$$\text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0^-} \mathbf{f}(x) = -\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0^+} \mathbf{f}(x) = -\infty.$$

Si noti che i valori di x_0 per i quali la retta di equazione $x = x_0$ può essere asintoto verticale per il grafico di **f** vanno cercati fra i punti di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ in cui **f** presenta una singolarità.

22.3 - Esempi ed esercizi.

Esempio 22.3.1

Sia $\mathbf{f}(x) := e^x$. Si ha $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \mathbb{R}$, e **f** è continua in tutto $\mathbb{R}$: pertanto, non possono esserci asintoti verticali ma **f** può avere un asintoto destro e un asintoto sinistro.

È
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
cosicché **f** non ha asintoti destri. Invece
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$
per cui l'asse delle ascisse è asintoto (orizzontale) sinistro per **f**.

Esempio 22.3.2

Sia $\mathbf{f}(x) := \mathbf{ln}(x)$. Si ha $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = (0, +\infty)$ e **f** è continua in tutto $(0, +\infty)$: pertanto **f** può avere un asintoto verticale in 0 (punto di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ in cui **f** presenta una singolarità) e un asintoto destro. In effetti si ha
$$\lim_{x \to 0} \mathbf{f}(x) = \lim_{x \to 0} \mathbf{ln}(x) = -\infty$$
cosicché l'asse delle ordinate è asintoto verticale per **f**; e
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{ln}(x)}{x} = 0$$
cosicché un eventuale asintoto destro per **f** sarebbe un asintoto orizzontale; ma
$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f}(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathbf{ln}(x) = +\infty$$
per cui **f** non ha asintoti destri.

Esempio 22.3.3

Sia $\mathbf{f}(x) := \sqrt{x^2+x}$. Si ha $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ e $\mathbf{f}$ è continua in tutto $(-\infty, -1]$ e in tutto $[0, +\infty)$: pertanto $\mathbf{f}$ non può avere asintoti verticali (non ci sono infatti punti di accumulazione per $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ in cui $\mathbf{f}$ presenti singolarità) ma può avere un asintoto sinistro e un asintoto destro. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$$

cosicché un eventuale asintoto destro per $\mathbf{f}$ ha equazione della forma $y = x + q$. Poiché inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}\right) - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)+1} = \frac{1}{2}$$

la retta di equazione $y = x + \frac{1}{2}$ è asintoto (obliquo) destro per $\mathbf{f}$.

Analogamente,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1$$

cosicché un eventuale asintoto sinistro per $\mathbf{f}$ ha equazione della forma

$$y = -x + q.$$

Poiché inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{f}(x) + x \;=\; \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x}\right) + x \;=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\sqrt{x^2+x}-x} \;=$$

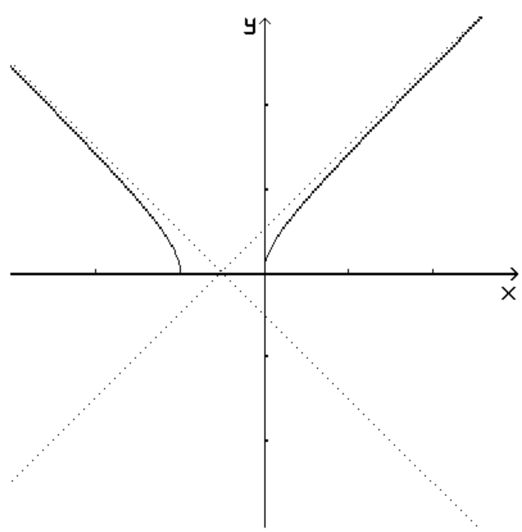
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}-x} \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-x} \;=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\left(|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-x} \;=\; \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\left(-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-x} \;=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-1} \;=\; -\,\frac{1}{2}$$

la retta di equazione $y = -x - \frac{1}{2}$ è asintoto (obliquo) sinistro per **f**.

Il grafico della funzione $\sqrt{x^2+x}$ (ascisse da -3 a $+3$; ordinate da -3 a $+3$) è approssimativamente il seguente:



Esercizi

Determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

22.3.4 $\quad \mathbf{f}(x) := \frac{x+1}{x}$;

22.3.5 $\quad \mathbf{f}(x) := \frac{2x}{x+3}$;

22.3.6 $\quad \mathbf{f}(x) := \frac{x^2-2}{x}$;

22.3.7 $\quad \mathbf{f}(x) := \frac{x^4+1}{x^2+1}$;

22.3.8 $\quad \mathbf{f}(x) := \frac{(x-2)^3}{x^2}$;

22.3.9 $\quad \mathbf{f}(x) := \frac{\mathbf{ln}(x)}{1+x}$;

22.3.10 $\quad \mathbf{f}(x) := e^{\frac{1}{x}}$;

22.3.11 $\quad \mathbf{f}(x) := \frac{\mathbf{sin}(x)}{x}$.

23.- STUDIO DI UNA FUNZIONE

23.1 - Introduzione.

Sia $\mathbf{f}$ una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Studiare* $\mathbf{f}$ significa raccogliere quante più informazioni possibili su $\mathbf{f}$ e sintetizzarle in un disegno approssimativo del grafico di $\mathbf{f}$; per quanto riguarda le funzioni che noi avremo occasione di considerare, risultano essenziali a questo scopo le nozioni sviluppate nei capitoli da 15 a 22.

Un itinerario consigliabile per lo studio della funzione $\mathbf{f}$ è il seguente.

$\boxed{1}$ Determinare $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ ed esprimerlo se possibile come unione $\mathbf{I_1} \cup \mathbf{I_2} \cup \ldots \cup \mathbf{I_n}$ di un numero finito di intervalli $\mathbf{I_j}$ tali che $\mathbf{f}$ risulta continua in ciascun $\mathbf{I_j}$ e derivabile in ogni punto interno di ciascun $\mathbf{I_j}$ (ciò naturalmente non è in generale possibile). Eventualmente, esprimere in modo più semplice la restrizione di $\mathbf{f}$ a ciascun $\mathbf{I_j}$ (ciò risulterà utile ad esempio quando nell'espressione generale di $\mathbf{f}$ è coinvolta la funzione “valore assoluto”).

$\boxed{2}$ Valutare se eventualmente $\mathbf{f}$ è una funzione pari o una funzione dispari o una funzione periodica (cfr. 15.4); in caso affermativo, sarà sufficiente studiare la restrizione di $\mathbf{f}$ a $[0, +\infty)$ oppure ad un intervallo avente per ampiezza il periodo di $\mathbf{f}$.

$\boxed{3}$ Descrivere il comportamento di $\mathbf{f}$ agli estremi di ciascun $\mathbf{I_j}$, calcolando il limite di $\mathbf{f}$ per x che tende a ciascun estremo (ivi compresi, eventualmente, $-\infty$ e $+\infty$). Si determinano in questa occasione gli eventuali asintoti (cfr. capitolo 22).

$\boxed{4}$ Calcolando, se è il caso, la derivata e la derivata seconda di $\mathbf{f}$: valutare dove $\mathbf{f}$ risulta crescente e dove decrescente; determinare gli eventuali punti di estremo locale per $\mathbf{f}$; valutare dove $\mathbf{f}$ risulta convessa e dove concava; determinare gli eventuali punti di flesso per $\mathbf{f}$.

$\boxed{5}$ Valutare per quali valori di x risulti $\mathbf{f}(x) > 0$ e per quali invece $\mathbf{f}(x) < 0$; determinare i punti in cui il grafico di $\mathbf{f}$ incontra eventualmente gli assi coordinati, e determinare altri punti del grafico.

$\boxed{6}$ Tracciare infine approssimativamente il grafico di $\mathbf{f}$.

23.2 - Studio della funzione $\mathbf{f}(x) := \dfrac{1}{\ln(x)}$.

Seguiamo l'itinerario consigliato in 23.1.

$\boxed{1}$

Si ha $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$\boxed{2}$

Poiché **f** non è definita in $(-\infty, 0]$, **f** non può essere né una funzione pari né una funzione dispari. Non c'è motivo per sospettare che **f** possa essere una funzione periodica.

$\boxed{3}$

Si ha $$\lim_{x\to 0^+} \mathbf{f}(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

per la (vii) del teorema 17.7.1, ricordando che $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ (cfr. 17.5.3). Inoltre,

$$\lim_{x\to 1^-} \mathbf{f}(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$$

per la (ix) del teorema 17.7.1, ricordando che $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ e che in $(0, 1)$ $\ln(x)$ non assume mai valori positivi. Analogamente,

$$\lim_{x\to 1^+} \mathbf{f}(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln(x)} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} \mathbf{f}(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0.$$

In particolare, si è stabilita l'esistenza di un asintoto verticale (la retta di equazione $x = 1$) e di un asintoto orizzontale destro (l'asse delle ascisse).

$\boxed{4}$

Applicando i teoremi delle sezioni 18.6 e 18.7, si trova che

$$\mathbf{f}'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}$$

e

$$\mathbf{f}''(x) = \frac{x^{-2}\cdot\ln^2(x) + \frac{1}{x}\cdot 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{\ln^4(x)} = \frac{x^{-2}\cdot\ln(x)\cdot(\ln(x)+2)}{\ln^4(x)} = \frac{\ln(x)\cdot(\ln(x)+2)}{x^2\cdot\ln^4(x)}.$$

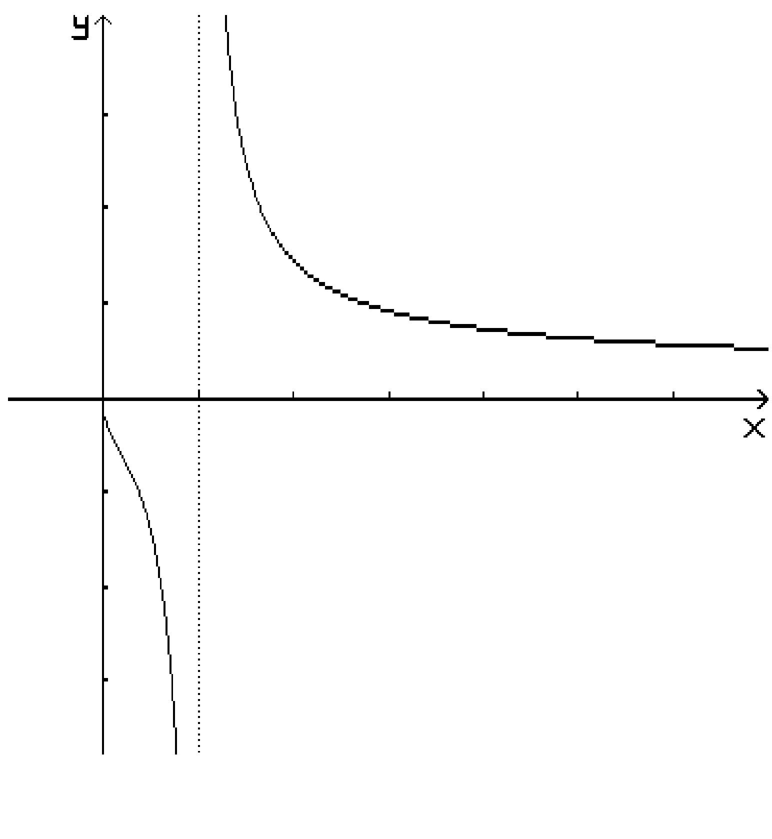
Si vede immediatamente che in tutto $\mathcal{D}$(**f**) è **f '**$(x) < 0$: per il teorema 19.3.1, **f** è decrescente nel proprio dominio; non ci sono punti estremanti. Il segno di **f ''**(x) coincide col segno di **ln**$(x) \cdot ($**ln**$(x) + 2)$, dunque (come si trova con semplici calcoli) **f ''**$(x) > 0$ per $0 < x < e^{-2}$ e per $x > 1$; i teoremi 21.2.2 e 21.3.3 ci consentono di affermare che **f** risulta convessa in $(0, e^{-2}]$, concava in $[e^{-2}, 1)$ e convessa in $(1, +\infty)$. In particolare, il punto e^{-2} è un punto di flesso per **f**.

$\boxed{5}$

Il segno di **f**(x) coincide col segno di **ln**(x): dunque **f**$(x) < 0$ in $(0, 1)$ e **f**$(x) > 0$ in $(1, +\infty)$. Il grafico di **f** non incontra gli assi coordinati. Può valer la pena di segnare il punto del grafico di coordinate $(e, 1)$.

$\boxed{6}$

Il grafico di $\dfrac{1}{\mathbf{ln}(x)}$ (ascisse da -1 a $+7$; ordinate da -4 a $+4$) è approssimativamente questo:



23.3 - Studio della funzione $\mathbf{f}(x) := x^3 - 3x^2$.

Seguiamo l'itinerario consigliato in 23.1.

$\boxed{1}$

Si ha $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$

La funzione data non è né pari né dispari; e non c'è motivo per sospettare che possa essere una funzione periodica.

$\boxed{3}$

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{f}(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 - \tfrac{3}{x}) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{f}(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^3(1 - \tfrac{3}{x}) = +\infty.$$

Valutiamo l'esistenza di asintoti sinistri e destri applicando il teorema 22.1.1. Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 3x) = \lim_{x\to-\infty} x^2(1 - \frac{3}{x}) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1 - \frac{3}{x}) = +\infty$$

la funzione data non ha né asintoti sinistri né asintoti destri.

$\boxed{4}$

Applicando i teoremi delle sezioni 18.6 e 18.7, si trova subito che

$$\mathbf{f}'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

e

$$\mathbf{f}''(x) = 6x - 6.$$

Con semplici calcoli si ricava che: in $(-\infty, 0)$ è **f'**$(x) > 0$; **f'**$(0) = 0$; in $(0, 2)$ è **f'**$(x) < 0$; **f'**$(2) = 0$; e in $(2, +\infty)$ è **f'**$(x) > 0$. Per il teorema 19.3.1, **f** risulta: crescente in $(-\infty, 0)$; decrescente in $(0, 2)$; crescente in $(2, +\infty)$. Il punto 0 è un punto di massimo locale; il punto 2 è un punto di minimo locale. Per quanto visto in $\boxed{3}$, non esistono punti di massimo né punti di minimo come definiti in 15.5.

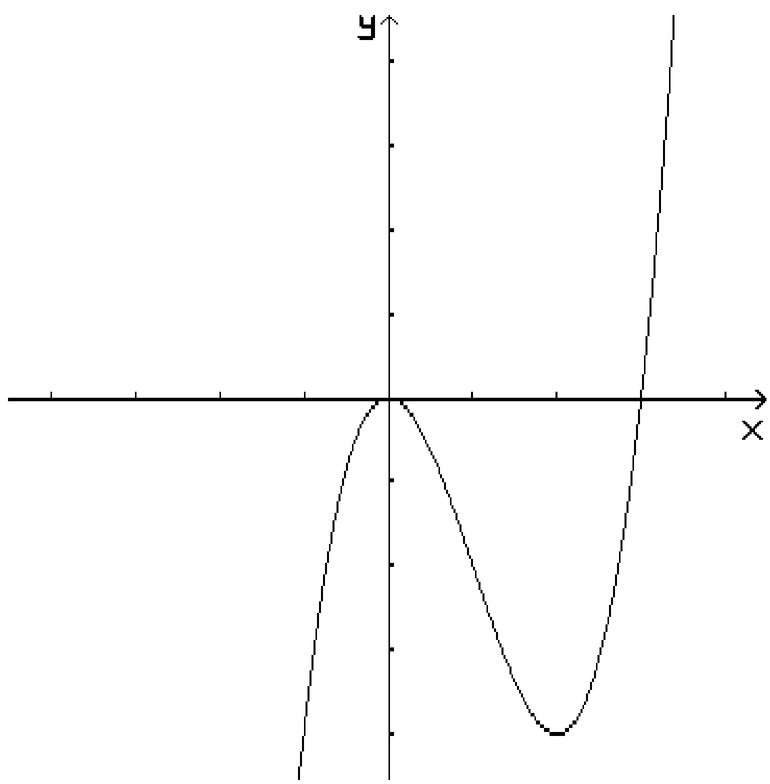
Si ha **f''**$(x) < 0$ per $x < 1$ e **f''**$(x) > 0$ per x>1; i teoremi 21.2.2 e 21.3.3 ci consentono di affermare che **f** risulta concava in $(-\infty, 1)$ e convessa in $(1, +\infty)$. In particolare, il punto 1 è un punto di flesso per **f**.

$\boxed{5}$

Con semplici calcoli si trova che **f**$(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 3)$, mentre **f**$(x) > 0$ in $(3, -\infty)$. Si ha **f**$(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 3$, dunque il grafico di **f** incontra l'asse delle ascisse nell'origine e nel punto di coordinate $(3, 0)$. Naturalmente, il grafico di **f** incontra l'asse delle ordinate nell'origine.

$\boxed{6}$

Il grafico della funzione $x^3 - 3x^2$ (ascisse da $-4{,}5$ a $+4{,}5$; ordinate da $-4{,}5$ a $+4{,}5$) è approssimativamente questo:



23.4 - Studio della funzione $\mathbf{f}(x) := \sin(x) - \cos(x)$.

Seguiamo l'itinerario consigliato in 23.1.

$\boxed{1}$

Poiché $\mathcal{D}(\mathbf{sin}) = \mathcal{D}(\mathbf{cos}) = \mathbb{R}$, è anche $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \mathbb{R}$ (cfr. 15.1).

$\boxed{2}$

Poiché **sin** e **cos** sono funzioni periodiche di periodo 2π (cfr. esempio 15.3.5), si ha

$$\mathbf{f}(x+2\pi) = \mathbf{sin}(x+2\pi) - \mathbf{cos}(x+2\pi) = \mathbf{sin}(x) - \mathbf{cos}(x) = \mathbf{f}(x)$$

e dunque **f** è periodica di periodo 2π.

Pertanto sarà sufficiente studiare la restrizione di **f** a $[0, 2\pi]$.

$\boxed{3}$

Si ha $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(2\pi) = -1$. È chiaro che non esistono asintoti.

$\boxed{4}$

Si ha $$\mathbf{f}'(x) = \mathbf{cos}(x) + \mathbf{sin}(x)$$

e $$\mathbf{f}''(x) = -\mathbf{sin}(x) + \mathbf{cos}(x) = -\mathbf{f}(x).$$

Per studiare il segno di $\mathbf{f}'(x)$ e $\mathbf{f}''(x)$, conviene considerare l'andamento di $\mathbf{sin}(x)$ e $\mathbf{cos}(x)$ in $[0, 2\pi]$.

Si vede facilmente che:

– in $(0, \frac{\pi}{4})$ è $\mathbf{cos}(x) > \mathbf{sin}(x) > 0$ e dunque $\mathbf{f}'(x) > 0$, $\mathbf{f}''(x) > 0$;

– $\mathbf{sin}(\frac{\pi}{4}) = \mathbf{cos}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

– in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ è $\mathbf{sin}(x) > \mathbf{cos}(x) > 0$ e dunque $\mathbf{f}'(x) > 0$, $\mathbf{f}''(x) < 0$;

– $\mathbf{sin}(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\mathbf{cos}(\frac{\pi}{2}) = 0$;

– in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi)$ è $\mathbf{sin}(x) > 0 > \mathbf{cos}(x)$ e $\mathbf{sin}(x) > |\mathbf{cos}(x)|$, cosicché $\mathbf{f}'(x) > 0$, $\mathbf{f}''(x) < 0$;

– $\mathbf{sin}(\frac{3}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathbf{cos}(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

– in $(\frac{3}{4}\pi, \pi)$ è $\mathbf{sin}(x) > 0 > \mathbf{cos}(x)$ e $\mathbf{sin}(x) < |\mathbf{cos}(x)|$, cosicché $\mathbf{f}'(x) < 0$, $\mathbf{f}''(x) < 0$;

– $\mathbf{sin}(\pi) = 0$, $\mathbf{cos}(\pi) = -1$;

– in $(\pi, \frac{5}{4}\pi)$ è $0 > \mathbf{sin}(x) > \mathbf{cos}(x)$ e dunque $\mathbf{f}'(x) < 0$, $\mathbf{f}''(x) < 0$;

– $\mathbf{sin}(\frac{5}{4}\pi) = \mathbf{cos}(\frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

– in $(\frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi)$ è $0 >$ **cos**$(x) >$ **sin**(x) e dunque **f ’**$(x) < 0$, **f ”**$(x) > 0$;
– **sin**$(\frac{3}{2}\pi) = -1$, **cos**$(\frac{3}{2}\pi) = 0$;
– in $(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi)$ è **cos**$(x) > 0 >$ **sin**(x) e $|$ **sin**(x) $|$ $>$ **cos**(x), da cui **f ’**$(x) < 0$, **f ”**$(x) > 0$;
– **sin**$(\frac{7}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, **cos**$(\frac{7}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
– in $(\frac{7}{4}\pi,\ 2\pi)$ è **cos**$(x) > 0 >$ **sin**(x) e $|$ **sin**(x) $|$ $<$ **cos**(x), da cui **f ’**$(x) > 0$, **f ”**$(x) > 0$;
– **sin**$(0) = 0$, **cos**$(0) = 1$.

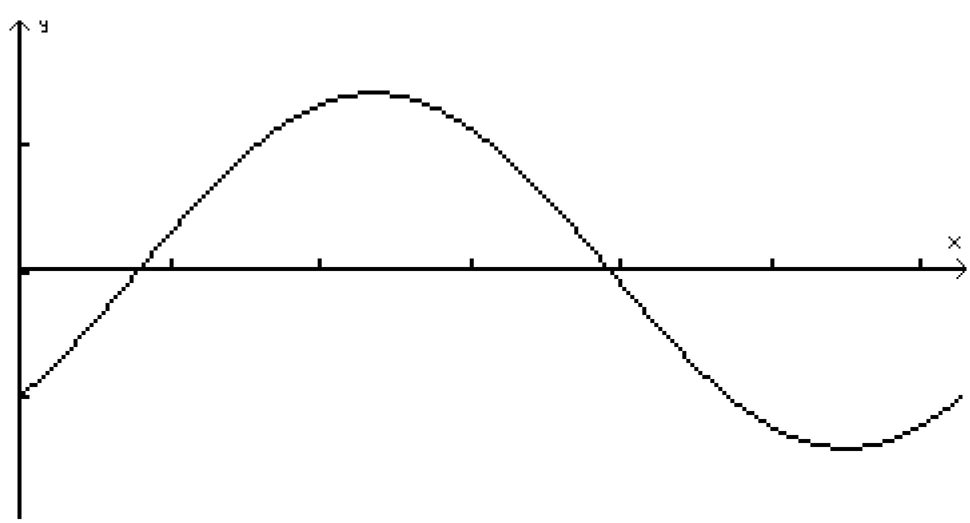
Riassumendo: **f ’**$(x) > 0$ (e dunque **f** è crescente) in $(0,\ \frac{3}{4}\pi)$ e in $(\frac{7}{4}\pi,\ 2\pi)$; **f ’**$(x) < 0$ (e dunque **f** è decrescente) in $(\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi)$; **f ”**$(x) > 0$ (e dunque **f** è convessa) in $(0,\ \frac{\pi}{4})$ e in $(\frac{5}{4}\pi,\ 2\pi)$; **f ”**$(x) < 0$ (e dunque **f** è concava) in $(\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi)$. È chiaro a questo punto che $\frac{3}{4}\pi$ è un punto di massimo, $\frac{7}{4}\pi$ è un punto di minimo, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5}{4}\pi$ sono punti di flesso.

$\boxed{5}$

Poiché **f ”**$(x) = -$**f**(x), possiamo sfruttare la discussione del punto precedente per determinare il segno di **f**(x) e per stabilire le intersezioni del grafico con gli assi coordinati. Nell’intervallo che stiamo studiando, si ha: **f**$(x) < 0$ in $(0,\ \frac{\pi}{4})$; **f**$(x) > 0$ in $(\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi)$; **f**$(x) < 0$ in $(\frac{5}{4}\pi,\ 2\pi)$. Inoltre: **f**$(0) = -1$; **f**$(x) = 0$ per $x := \frac{\pi}{4}$ e per $x := \frac{5}{4}\pi$.

$\boxed{6}$

Il grafico della funzione **sin**$(x) -$ **cos**(x) (ascisse da 0 a $+2\pi$; ordinate da -2 a $+2$) è approssimativamente questo:



23.5 - Studio della funzione $\mathbf{f}(x) := \frac{x \cdot |x| - 1}{|x-1|}$.

Seguiamo l'itinerario consigliato in 23.1.

$\boxed{1}$

Si ha $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = (-\infty, 0] \cup [0, 1) \cup (1, +\infty)$. Si noti la scelta di individuare $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ come unione di tre intervalli anziché di due. All'interno di ciascuno dei tre intervalli considerati **f** è senz'altro derivabile per i risultati del capitolo 18. Inoltre si ha:

$\mathbf{f}(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ in $(-\infty, 0]$;

$\mathbf{f}(x) = -x - 1$ in $[0, 1)$;

$\mathbf{f}(x) = x + 1$ in $(1, +\infty)$;

e ciascuna di queste tre funzioni è relativamente semplice da studiare (in particolare, il grafico di **f** in $[0, 1)$ e in $(1, +\infty)$ è costituito da porzioni di rette e quindi può essere immediatamente disegnato senza ulteriori calcoli). Si noti che **f** è derivabile anche in 0; ma per affermare ciò si deve effettuare il calcolo diretto del rapporto incrementale in 0 della **f**.

$\boxed{2}$

La **f** non è pari né dispari; né c'è motivo per sospettare che possa essere una funzione periodica.

$\boxed{3}$

Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{f}(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(0) = -1 \ .$$

Inoltre,

$$\lim_{x \to 1^-} \mathbf{f}(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x - 1) = -2$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f}(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty,$$

ma questi ultimi due limiti non rivestono interesse perché, come si è già osservato, non ci sono problemi per disegnare il grafico di **f** in $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

È chiaro che la retta di equazione $y = x + 1$ è un asintoto destro per **f**, venendo addirittura a coincidere, per $x > 1$, col grafico di **f**.

Valutiamo l'esistenza di un asintoto sinistro applicando il teorema 22.1.1. Poiché

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathbf{f}(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} (\mathbf{f}(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1,$$

la retta di equazione $y = x + 1$ è anche asintoto sinistro per **f**.

$\boxed{4}$

Per valutare dove **f** risulta crescente e dove decrescente, determinare gli eventuali punti di estremo locale per **f**, valutare dove **f** risulta convessa e dove concava, determinare gli eventuali punti di flesso per **f**, consideriamo soltanto la restrizione di **f** a $(-\infty, 0]$; infatti, come si è già osservato, non ci sono problemi per disegnare il grafico in $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Applicando i teoremi della sezione 18.6, si trova subito che in $(-\infty, 0]$ è

$$\mathbf{f}'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

e
$$\mathbf{f}''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Con semplici calcoli si ricava che: in $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ è $\mathbf{f}'(x) > 0$; $\mathbf{f}'(1-\sqrt{2}) = 0$; in $(1-\sqrt{2}, 0)$ è $\mathbf{f}'(x) < 0$. Per il teorema 19.3.1, **f** risulta crescente in $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ e decrescente in $(1-\sqrt{2}, 0)$; il punto $1-\sqrt{2}$ è un punto di massimo locale. Per quanto visto in $\boxed{3}$, non esistono punti di massimo né punti di minimo come definiti in 15.5.

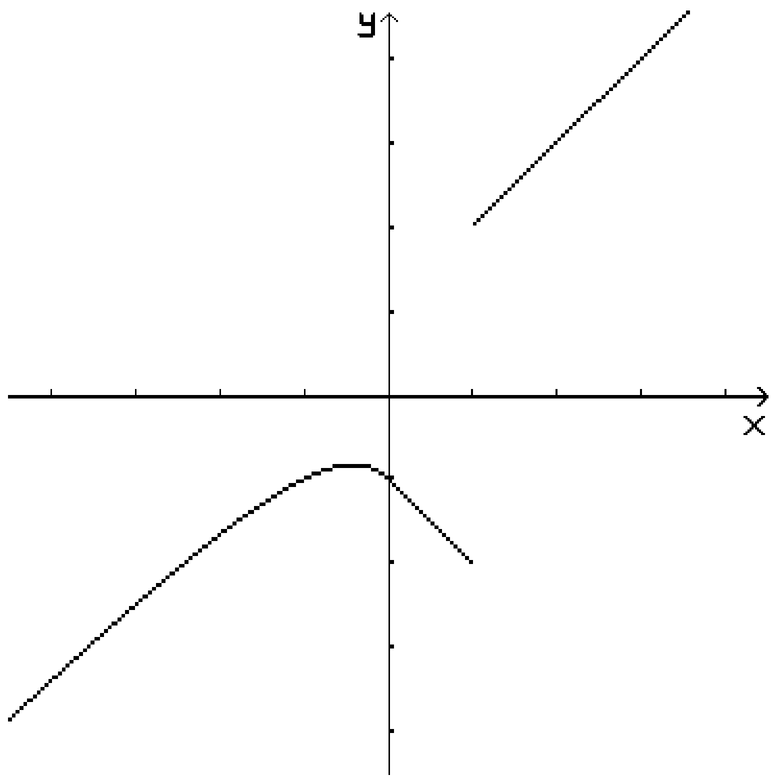
In $(-\infty, 0]$ si ha $\mathbf{f}''(x) < 0$; per il teorema 21.3.2, in $(-\infty, 0]$ **f** risulta concava.

$\boxed{5}$

Con semplici calcoli si trova che $\mathbf{f}(x) < 0$ in $(-\infty, 1)$, mentre $\mathbf{f}(x) > 0$ in $(1, +\infty)$. Non è mai $\mathbf{f}(x) = 0$, dunque il grafico di **f** non incontra l'asse delle ascisse; poiché $\mathbf{f}(0) = -1$, il grafico di **f** incontra l'asse delle ordinate nel punto di coordinate $(0, -1)$.

$\boxed{6}$

Il grafico della funzione $\frac{x\cdot|x|-1}{|x-1|}$ (ascisse da $-4{,}5$ a $+4{,}5$; ordinate da $-4{,}5$ a $+4{,}5$) è approssimativamente questo:



24.- PRIMITIVE

24.1 - Generalità.

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice *primitiva* di **f** una funzione derivabile $\mathbf{F}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la cui funzione derivata $\mathbf{F}_0'$ (cfr. 18.5) coincida con **f**.

Sia $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$, e sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. Si dice *primitiva di* **f** *in* **I** una funzione derivabile $\mathbf{F}_0 : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ la cui funzione derivata $\mathbf{F}_0'$ (cfr. 18.5) coincida con la restrizione di **f** ad **I** (cfr. 4.5).

Esempio 24.1.1

La funzione $\mathbf{ln}(x)$ è una primitiva della funzione $\frac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$; la funzione $\mathbf{ln}(-x)$ è una primitiva della funzione $\frac{1}{x}$ in $(-\infty, 0)$; la funzione $\mathbf{ln}(\,|\,x\,|\,)$ è una primitiva della funzione $\frac{1}{x}$.

Data una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, esiste sempre una primitiva di **f**? Se esiste una primitiva di **f**, ne esiste una sola?

La risposta è "no" per entrambe le domande. Si dimostra infatti che una funzione derivata non può avere singolarità eliminabili; qualsiasi funzione che abbia singolarità eliminabili non ha pertanto primitiva. Inoltre, data una primitiva $\mathbf{F}_0$ di una funzione è facile trovarne infinite altre: basta sommare a $\mathbf{F}_0$ una qualsiasi funzione costante; infatti, se c è una funzione costante si ha $$(\mathbf{F}_0 + c)' = \mathbf{F}_0' + c' = \mathbf{F}_0'$$
per il teorema 18.6.1 e l'esempio 18.2.3.

Teorema 24.1.2

Sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se **f** è continua in un intervallo **I**, esiste una primitiva di **f** in **I**.

Dimostrazione — Questo risultato verrà dimostrato col teorema 25.6.1.

Osservazione 24.1.3

La condizione di continuità espressa dal teorema 24.1.2 è sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di una primitiva. La funzione **f** definita ponendo:

$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} 2\,x\,\mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right) - \mathbf{cos}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0 (non esiste nemmeno il $\lim\limits_{x\to 0} \mathbf{f}(x)$) ma ammette come primitiva la

$$\mathbf{F}(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Teorema 24.1.4

Sia $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$, sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e sia $\mathbf{F}_0$ una primitiva di **f** in **I**. Le primitive di **f** in **I** sono tutte e sole le funzioni $\mathbf{I} \to \mathbb{R}$ che si possono scrivere nella forma $\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_*$ con $\mathbf{F}_* \in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$ e $\mathbf{F}_*' = 0$.

Dimostrazione — Sia $\mathcal{P}$ l'insieme delle primitive di **f** in **I**, e sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni $\mathbf{I} \to \mathbb{R}$ che si possono scrivere nella forma $\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_*$ con $\mathbf{F}_* \in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$ e $\mathbf{F}_*' = 0$. Dobbiamo provare che $\mathcal{P} = \mathcal{F}$.
È immediato che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$. Infatti, se $\mathbf{g} \in \mathcal{F}$ è $\mathbf{g} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_*$ con $\mathbf{F}_* \in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$ e $\mathbf{F}_*' = 0$; allora $\mathbf{g}' = (\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_*)' = \mathbf{F}_0' + \mathbf{F}_*' = \mathbf{f} + 0 = \mathbf{f}$ cosicché $\mathbf{g} \in \mathcal{P}$.
Viceversa, è anche $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}$. Infatti, se $\mathbf{g} \in \mathcal{P}$ è $\mathbf{g} = \mathbf{F}_0 + (\mathbf{g} - \mathbf{F}_0)$ con $\mathbf{g} - \mathbf{F}_0 \in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$ (perché $\mathbf{g} \in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$ e $\mathbf{F}_0 \in \mathfrak{D}(\mathbf{I})$) e $(\mathbf{g} - \mathbf{F}_0)' = \mathbf{g}' - \mathbf{F}_0' = \mathbf{f} - \mathbf{f} = 0$.

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali e sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione definita in $[a, b]$. Una funzione $\mathbf{F}_0$ continua in $[a, b]$ la cui restrizione ad (a, b) sia una primitiva della restrizione di **f** ad (a, b) si dice *primitiva di* **f** *in* $[a, b]$. Analogamente si definiscono le "primitive" per una funzione in intervalli della forma $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$ oppure $[a, +\infty)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 24.1.5

Sia **I** un intervallo di numeri reali, sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione definita in **I** e sia $\mathbf{F}_0$ una primitiva di **f** in **I**. Le primitive di **f** in **I** sono tutte e sole le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che si possono scrivere nella forma $\mathbf{F}_0 + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione — Sia $\mathbf{F}_0$ una primitiva di **f** in **I**. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ è $(\mathbf{F}_0 + c)' = \mathbf{F}_0' = \mathbf{f}$ (cfr. teorema 18.6.1 ed esempio 18.2.3), e dunque $\mathbf{F}_0 + c$ è anch'essa una primitiva di **f** in **I**. Se poi $\mathbf{F}_1$ è una qualsiasi primitiva di **f** in **I**, allora per ogni x interno ad **I** si ha

$$(\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_1)'(x) = \mathbf{F}_0'(x) - \mathbf{F}_1'(x) = \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x) = 0$$

cosicché $\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_1$ è una funzione costante in **I** per il teorema 18.2.5: dunque esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_1 = c$, ossia $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_1 + c$ come si voleva.

Sia $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$, e sia $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}(\mathbf{f})$. L'insieme di tutte le primitive di **f** in **I** si indica con la scrittura

$\int \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x$ o, più brevemente, con $\int \mathbf{f}$.

e si dice, talvolta, *integrale indefinito* di **f** (in **I**). Si noti che questa notazione non evidenzia l'insieme **I**; inoltre la parola "integrale" induce facilmente confusione con la teoria dell'integrazione (alla quale accenneremo nel capitolo 25), collegabile sotto opportune ipotesi al problema della ricerca delle primitive (cfr. teorema 25.6.1) ma ben distinta da esso. Noi ci adegueremo al simbolo $\int$, ormai troppo diffuso perché lo si possa combattere, ma eviteremo sempre di usare l'espressione "*integrale indefinito*".

Esempio 24.1.6

Se $\mathbf{I} = (0, +\infty)$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ è l'insieme delle funzioni definite in **I** che si possono scrivere nella forma $\mathbf{ln}(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$;

ciò si esprime scrivendo $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathbf{ln}(x) + c.$$

Se $\mathbf{I} = (-\infty, 0)$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ è l'insieme delle funzioni definite in **I** che si possono scrivere nella forma $\mathbf{ln}(-x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$;

ciò si esprime scrivendo $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathbf{ln}(-x) + c.$$

Osservazione 24.1.7

Si noti che, benché $\mathbf{ln}(|x|)$ sia (come si è già osservato in 24.1.1) una primitiva di $\frac{1}{x}$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, non si può scrivere $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathbf{ln}(|x|) + c.$$

Infatti la funzione **f** definita ponendo:

$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} \mathbf{ln}(-x) + 1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ \mathbf{ln}(x) + 2 & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

è una primitiva di $\frac{1}{x}$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ma non differisce da $\mathbf{ln}(|x|)$ per una funzione costante.

Nel seguito di questo capitolo supporremo fissato un insieme $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ e col termine "primitiva" intenderemo sempre "primitiva in $\mathbf{I}$".

Ci farà anche comodo la seguente notazione: se **A**, **B** sono insiemi di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e **f** è una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indicheremo con $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ l'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che si possono scrivere nella forma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ e $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$; indicheremo con $\lambda\mathbf{A}$ l'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che si possono scrivere nella forma $\lambda\mathbf{a}$ con $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$; e indicheremo con $\mathbf{f} - \mathbf{A}$ l'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che si possono scrivere nella forma $\mathbf{f} - \mathbf{a}$ con $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$.

24.2 - Ricerca di primitive.

Per la ricerca di primitive si possono utilizzare "alla rovescia" le informazioni raccolte nel capitolo 18 (e particolarmente nelle sezioni 18.2, 18.6, 18.7 e 18.8) sulle derivate delle funzioni elementari e di quelle che si possono ottenere da esse mediante somma, prodotto, quoziente, elevamento a potenza e composizione.

Si ha così che:

– una primitiva della funzione costante uguale a zero è una funzione costante qualsiasi;

– una primitiva della funzione x^n è la funzione $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (se $n \neq -1$; altrimenti si veda l'esempio 24.1.1);

– una primitiva della funzione $\mathbf{sin}(x)$ è la funzione $-\mathbf{cos}(x)$;

– una primitiva della funzione $\mathbf{cos}(x)$ è la funzione $\mathbf{sin}(x)$;

– una primitiva della funzione e^x è la funzione e^x stessa;

ecc., ecc..

Lo studente che si fosse costruito una "tabella" con le derivate delle funzioni elementari è invitato a dedurne una con primitive delle stesse funzioni (ma per, ad es., una primitiva della funzione $\mathbf{ln}(x)$, si veda 24.3.4; per una primitiva della funzione $\mathbf{tg}(x)$, si veda 24.4.5).

Dal teorema 18.6.2 si ottiene poi il

Teorema 24.2.1

Siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ funzioni $\mathbf{I} \to \mathbb{R}$ che ammettono primitiva, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora anche $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ e $\lambda\mathbf{f}$ ammettono primitiva, e si ha

$$\int(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \int\mathbf{f} + \int\mathbf{g} \qquad \text{e} \qquad \int(\lambda\mathbf{f}) = \lambda\int\mathbf{f}\,.$$

Dimostrazione – Per provare che $\int(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \int\mathbf{f} + \int\mathbf{g}$, si devono dimostrare le due inclusioni

$$\int(\mathbf{f}+\mathbf{g}) \subseteq \int\mathbf{f} + \int\mathbf{g} \qquad \text{e} \qquad \int\mathbf{f} + \int\mathbf{g} \subseteq \int(\mathbf{f}+\mathbf{g}).$$

Sia $\mathbf{h} \in \int(\mathbf{f}+\mathbf{g})$; scelto $\mathbf{F}_0 \in \int\mathbf{f}$, è $\mathbf{h} = \mathbf{F}_0 + (\mathbf{h} - \mathbf{F}_0)$ e si tratta di verificare che $\mathbf{h} - \mathbf{F}_0 \in \int\mathbf{g}$: in effetti, $(\mathbf{h} - \mathbf{F}_0)' = \mathbf{h}' - \mathbf{F}_0' = \mathbf{f} + \mathbf{g} - \mathbf{f} = \mathbf{g}$.

Siano ora $\mathbf{F}_0 \in \int\mathbf{f}$ e $\mathbf{G}_0 \in \int\mathbf{g}$; allora $\mathbf{F}_0 + \mathbf{G}_0 \in \int(\mathbf{f}+\mathbf{g})$ perché $(\mathbf{F}_0 + \mathbf{G}_0)' = \mathbf{F}_0' + \mathbf{G}_0' = \mathbf{f} + \mathbf{g}$.

Analogamente si prova che $\int(\lambda\mathbf{f}) = \lambda\int\mathbf{f}$.

24.3 - Ricerca di primitive "per parti".

Teorema 24.3.1

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbf{I} \to \mathbb{R}$, e sia $\mathbf{F}_0$ una primitiva di **f**. Se $\mathbf{F}_0\mathbf{g}'$ ammette una primitiva, anche **fg** ammette una primitiva, e si ha

$$\int \mathbf{fg} = \mathbf{F}_0\mathbf{g} - \int \mathbf{F}_0\mathbf{g}'.$$

Dimostrazione — Si devono provare le due inclusioni

$$\int \mathbf{fg} \subseteq \mathbf{F}_0\mathbf{g} - \int \mathbf{F}_0\mathbf{g}' \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F}_0\mathbf{g} - \int \mathbf{F}_0\mathbf{g}' \subseteq \int \mathbf{fg}.$$

Sia $\mathbf{h} \in \int \mathbf{fg}$; allora $\mathbf{h} = \mathbf{F}_0\mathbf{g} - (\mathbf{F}_0\mathbf{g} - \mathbf{h})$, e si tratta di verificare che $\mathbf{F}_0\mathbf{g} - \mathbf{h} \in \int \mathbf{F}_0\mathbf{g}'$. In effetti, ricordando 18.6.2 e 18.6.4 si ha

$$(\mathbf{F}_0\mathbf{g} - \mathbf{h})' = (\mathbf{F}_0\mathbf{g})' - \mathbf{h}' = \mathbf{F}_0'\mathbf{g} + \mathbf{F}_0\mathbf{g}' - \mathbf{fg} = \mathbf{fg} + \mathbf{F}_0\mathbf{g}' - \mathbf{fg} = \mathbf{F}_0\mathbf{g}'$$

perché $\mathbf{F}_0' = \mathbf{f}$ e $\mathbf{h}' = \mathbf{fg}$.

Viceversa, sia $\mathbf{k} \in \int \mathbf{F}_0\mathbf{g}'$; si tratta di verificare che $\mathbf{F}_0\mathbf{g} - \mathbf{k} \in \int \mathbf{fg}$. In effetti, ricordando 18.6.2 e 18.6.4 si ha

$$(\mathbf{F}_0\mathbf{g} - \mathbf{k})' = (\mathbf{F}_0\mathbf{g})' - \mathbf{k}' = \mathbf{F}_0'\mathbf{g} + \mathbf{F}_0\mathbf{g}' - \mathbf{F}_0\mathbf{g}' = \mathbf{F}_0'\mathbf{g} = \mathbf{fg}$$

poiché $\mathbf{k}' = \mathbf{F}_0\mathbf{g}'$ e $\mathbf{F}_0' = \mathbf{f}$.

In pratica, il teorema 24.3.1 riconduce la ricerca di una primitiva del prodotto **fg** alla ricerca di primitive di **f** e di $\mathbf{F}_0\mathbf{g}'$ (essendo $\mathbf{F}_0$ una primitiva di **f**); è chiaro che tale teorema non risolve quindi in generale il problema di determinare una primitiva del prodotto **fg** conoscendo una primitiva di **f** e una primitiva di **g**. In effetti non è detto in generale che un prodotto di funzioni elementari abbia una primitiva esprimibile mediante somme, prodotti, quozienti, potenze, ecc. di funzioni elementari.

Nel seguito di questi appunti, quando ci sarà occasione di applicare il teorema 24.3.1 useremo la seguente notazione: porremo una freccetta $\uparrow$ rivolta verso l'alto sopra quello dei due fattori del quale si va a considerare una primitiva, e porremo una freccetta $\downarrow$ rivolta verso il basso sotto quello del quale invece si va a considerare la derivata. Scriveremo cioè, se $\mathbf{F}_0$ è una primitiva di **f**,

$$\int \overset{\uparrow}{\mathbf{f}}\, \underset{\downarrow}{\mathbf{g}} = \mathbf{F}_0\mathbf{g} - \int \mathbf{F}_0\mathbf{g}'.$$

Esempio 24.3.2

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Si ha

$$\int \underset{\downarrow}{x}\, \overset{\uparrow}{\mathbf{cos}}(x)\,\mathrm{d}x = x\,\mathbf{sin}(x) - \int \mathbf{sin}(x)\,\mathrm{d}x = x\mathbf{sin}(x) - (-\mathbf{cos}(x)) + c = x\,\mathbf{sin}(x) + \mathbf{cos}(x) + c.$$

Esempio 24.3.3

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Si ha

$$\int \underset{\downarrow}{x}\ \overset{\uparrow}{e^x} = x\,e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = x\,e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c.$$

Esempio 24.3.4 (quasi un gioco di prestigio!)

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}^+$. Si ha

$$\int \mathbf{ln}(x)\,\mathrm{d}x = \int \underset{\downarrow}{\mathbf{ln}(x)} \cdot \overset{\uparrow}{1}\ \mathrm{d}x = x\,\mathbf{ln}(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\,\mathbf{ln}(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\,\mathbf{ln}(x) - x + c = x \cdot (\mathbf{ln}(x) - 1) + c.$$

Esempio 24.3.5

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Si ha

$$\int \underset{\downarrow}{e^x}\ \overset{\uparrow}{\mathbf{cos}(x)}\,\mathrm{d}x = e^x\,\mathbf{sin}(x) - \int e^x\,\mathbf{sin}(x)\,\mathrm{d}x$$

e analogamente

$$\int \underset{\downarrow}{e^x}\ \overset{\uparrow}{\mathbf{sin}(x)}\,\mathrm{d}x = e^x\,(-\mathbf{cos}(x)) - \int e^x\,(-\mathbf{cos}(x))\,\mathrm{d}x = -e^x\,\mathbf{cos}(x) + \int e^x\,\mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sia $\mathcal{P}$ una primitiva di $e^x\,\mathbf{cos}(x)$: si è dunque trovato che

$$\mathcal{P} = e^x\,\mathbf{sin}(x) + e^x\,\mathbf{cos}(x) - (\mathcal{P} + c_1)$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$; ne segue

$$2\mathcal{P} = e^x\,\mathbf{sin}(x) + e^x\,\mathbf{cos}(x) - c_1$$

da cui infine, posto $c := -\frac{1}{2}c_1$,

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\,e^x\,(\mathbf{sin}(x) + \mathbf{cos}(x)) + c.$$

24.4 - Ricerca di primitive per sostituzione.

Teorema 24.4.1

Siano **f**, **g** funzioni $\mathbf{I} \to \mathbb{R}$ con **g** derivabile in **I**, e sia $\mathbf{F}_0$ una primitiva di **f**. Allora $\mathbf{F}_0 \circ \mathbf{g}$ è una primitiva di $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}'$, ossia

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{g}(x)) \in \int \mathbf{f}(\mathbf{g}(x))\mathbf{g}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione — Si tratta di dimostrare che la derivata (rispetto a x) di $\mathbf{F}_0 \circ \mathbf{g}$ è $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}'$; ma ciò segue subito dal teorema 18.7.1.

In pratica, per applicare il teorema 24.4.1 si procede come segue (e si dice che si opera "per sostituzione"):

Si pone $t := \mathbf{g}(x)$; quale artificio mnemonico, si scrive di conseguenza

$$\mathrm{d}t = \mathbf{g}'(x)\,\mathrm{d}x$$

(si ricordi la notazione "storica" della derivata, per la quale $\mathbf{g}'(x) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{g}(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$). Allora $\int \mathbf{f}(\mathbf{g}(x))\mathbf{g}'(x)\,\mathrm{d}x$ diventa $\int \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$; si giunge così a considerare una primitiva $\mathbf{F}_0(t)$ di **f**, e sostituendo nuovamente $\mathbf{g}(x)$ a t si ricava infine la $\mathbf{F}_0(\mathbf{g}(x))$.

Esempio 24.4.2

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Calcoliamo $\int \mathbf{sin}(x)\,\mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x$

procedendo per sostituzione. Poniamo $t := \mathbf{sin}(x)$ e scriviamo $\mathrm{d}t = \mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x$.

Si ottiene $\int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + c$ da cui, sostituendo a t nuovamente $\mathbf{sin}(x)$,

$$\int \mathbf{sin}(x)\,\mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathbf{sin}^2(x) + c.$$

Esercizio 24.4.3

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Calcoliamo $\int \mathbf{sin}(x)\,\mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x$

procedendo ancora per sostituzione ma ponendo questa volta $t := \mathbf{cos}(x)$, da cui $\mathrm{d}t = -\mathbf{sin}(x)\,\mathrm{d}x$.

Si ottiene $\int (-t)\,\mathrm{d}t = -\int t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}t^2 + c$ da cui, sostituendo a t nuovamente $\mathbf{cos}(x)$,

$$\int \mathbf{sin}(x)\,\mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\mathbf{cos}^2(x) + c.$$

Questo risultato è coerente con quello trovato nell'esempio 24.4.2 ?

Esempio 24.4.4

Sia $\mathbf{I} = [5, \; +\infty)$. Calcoliamo $\quad \int x \cdot \sqrt{x-5}\,\mathrm{d}x \quad$ procedendo per sostituzione.

Poniamo $t \coloneqq \sqrt{x-5}$ e scriviamo $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x$ (da cui $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$).

Inoltre, $x = t^2 + 5$. Si è così ricondotti a calcolare

$$\int (t^2+5)\cdot t \cdot (2t\,\mathrm{d}t)$$

ossia $\quad \int (2t^4 + 10t^2)\,\mathrm{d}t = 2\int t^4\,\mathrm{d}t + 10\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}t^5 + \frac{10}{3}t^3 + c$

da cui, sostituendo a t nuovamente $\sqrt{x-5}$,

$$\int x \cdot \sqrt{x-5}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5} + \tfrac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3} + c.$$

Esempio 24.4.5

Sia $\mathbf{I} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Calcoliamo $\int \mathbf{tg}\,(x)\,\mathrm{d}x \left(= \int \frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)}\,\mathrm{d}x \right)$ procedendo per sostituzione.

Poniamo $t \coloneqq \mathbf{cos}(x)$ e scriviamo $\mathrm{d}t = -\mathbf{sin}(x)\,\mathrm{d}x$. Ci si riconduce così al calcolo in $(0, 1)$ di

$$\int -t^{-1}\,\mathrm{d}t = -\mathbf{ln}(t) + c.$$

da cui, sostituendo nuovamente $\mathbf{cos}(x) = t$, $\quad \int \mathbf{tg}(x)\,\mathrm{d}x = -\mathbf{ln}(\mathbf{cos}(x)) + \mathrm{c}.$

Allo stesso modo si trova, per $\mathbf{I} = (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$, $\int \mathbf{tg}(x)\,\mathrm{d}x = -\mathbf{ln}(-\mathbf{cos}(x)) + \mathrm{c}.$

Teorema 24.4.6

Sia $\mathbf{g}$ una funzione $\mathbf{I} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbf{I}$. Allora

$$\mathbf{ln}\,(|\mathbf{g}(x)|) \in \int \frac{\mathbf{g}'(x)}{\mathbf{g}(x)}\,\mathrm{d}x$$

e (se $n \neq 1$)

$$\frac{1}{(1-n)(\mathbf{g}(x))^{n-1}} \in \int \frac{\mathbf{g}'(x)}{(\mathbf{g}(x))^n}\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione — Basta procedere per sostituzione, ponendo $t \coloneqq \mathbf{g}(x)$.

24.5 - Esempi ed esercizi sulla ricerca di primitive.

Esempio 24.5.1

Sia $\mathbf{I} = (1, +\infty)$. Si ha

$$\int \frac{\mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \int \underset{\downarrow}{\mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x))} \cdot \overset{\uparrow}{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x)) \cdot \mathbf{ln}(x) - \int \frac{1}{\mathbf{ln}(x)} \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathbf{ln}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x)) \cdot \mathbf{ln}(x) - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x)) \cdot \mathbf{ln}(x) - \mathbf{ln}(x) + c = \mathbf{ln}(x) \cdot (\mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x)) - 1) + c.$$

Esempio 24.5.2

Sia $\mathbf{I} = (0, +\infty)$. Si ha

$$\int \mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x))\,\mathrm{d}x = \int \overset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x))}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x \cdot \mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x)) - \int x \cdot (-\mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x))) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x \cdot \mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x)) + \int \mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x)))\,\mathrm{d}x.$$

Analogamente,

$$\int \mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x))\,\mathrm{d}x = \int \overset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x))}\,\mathrm{d}x = x \cdot \mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x)) - \int x \cdot \mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x))) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x \cdot \mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x)) - \int \mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x)))\,\mathrm{d}x.$$

Sia $\mathcal{P}$ una primitiva di $\mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x))$: si è dunque trovato che

$$\mathcal{P} = x \cdot \mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x)) + x \cdot \mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x)) - (\mathcal{P} + c_1)$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$; ne segue $\qquad 2\mathcal{P} = x \cdot \mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x)) + x \cdot \mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x)) - c_1$

da cui infine, posto $c := -\frac{1}{2}c_1$, $\qquad \mathcal{P} = \frac{1}{2}\,x\,(\mathbf{sin}(\mathbf{ln}(x)) + \mathbf{cos}(\mathbf{ln}(x))) + c$.

Esempio 24.5.3

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Si ha

$$\int \mathbf{sin}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\uparrow}{\mathbf{sin}(x)} \cdot \underset{\downarrow}{\mathbf{sin}(x)}\,\mathrm{d}x = -\mathbf{sin}(x) \cdot \mathbf{cos}(x) + \int \mathbf{cos}^2(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\mathbf{sin}(x) \cdot \mathbf{cos}(x) + \int (1 - \mathbf{sin}^2(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\mathbf{sin}(x) \cdot \mathbf{cos}(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \mathbf{sin}^2(x)\,\mathrm{d}x = -\mathbf{sin}(x) \cdot \mathbf{cos}(x) + x - \int \mathbf{sin}^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sia $\mathcal{P}$ una primitiva di $\mathbf{sin}^2(x)$: si è dunque trovato che

$$\mathcal{P} = -\mathbf{sin}(x) \cdot \mathbf{cos}(x) + x - (\mathcal{P} + c_1)$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$; ne segue $\qquad 2\mathcal{P} = -\mathbf{sin}(x) \cdot \mathbf{cos}(x) + x - c_1$

da cui infine, posto $c := -\frac{1}{2}c_1$, $\qquad \mathcal{P} = \frac{1}{2}\,(x - \mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(x)) + c$.

Esempio 24.5.4

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Si ha

$$\int \mathbf{cos}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int (1 - \mathbf{sin}^2(x))\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \mathbf{sin}^2(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= x - \tfrac{1}{2}(x - \mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(x)) - c = \tfrac{1}{2}(x + \mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(x)) - c.$$

Esempio 24.5.5

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Calcoliamo $\int (5x+3)^{27}\,\mathrm{d}x$ procedendo per sostituzione.

Poniamo $t := 5x + 3$ e scriviamo $\mathrm{d}t = 5\,\mathrm{d}x$

da cui $\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t$. Ci si riconduce così al calcolo di

$$\tfrac{1}{5}\int t^{27}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{28}\,t^{28} + c$$

da cui, sostituendo a t nuovamente $5x + 3$,

$$\int (5x+3)^{27}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{140}(5x+3)^{28} + c.$$

Esempio 24.5.6

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Calcoliamo $\int \mathbf{cos}^3(x)\,\mathrm{d}x$ procedendo per sostituzione.

Scriviamo innanzitutto

$$\int \mathbf{cos}^3(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathbf{cos}(x)\cdot\mathbf{cos}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathbf{cos}(x)\cdot(1 - \mathbf{sin}^2(x))\,\mathrm{d}x.$$

Poniamo $t := \mathbf{sin}(x)$ e scriviamo

$$\mathrm{d}t = \mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ci si riconduce così al calcolo di

$$\int (1 - t^2)\,\mathrm{d}t = t - \tfrac{1}{3}\,t^3 + c$$

da cui, sostituendo a t nuovamente $\mathbf{sin}(x)$,

$$\int \mathbf{cos}^3(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{sin}(x) - \tfrac{1}{3}\mathbf{sin}^3(x) + c.$$

Esercizio 24.5.7

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Si calcoli $\int \mathbf{cos}^3(x)\,\mathrm{d}x$ procedendo per parti.

Esempio 24.5.8

Sia $\mathbf{I} = \mathbb{R}$. Calcoliamo $\int \sqrt[3]{1+3\,\mathbf{sin}(x)}\cdot \mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x$
procedendo per sostituzione.

Poniamo $t := 1+3\,\mathbf{sin}(x)$ e scriviamo $\mathrm{d}t = 3\,\mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x$.

Poiché

$$\int \sqrt[3]{1+3\,\mathbf{sin}(x)}\cdot \mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int \sqrt[3]{1+3\,\mathbf{sin}(x)}\cdot 3\mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x$$

ci si riconduce al calcolo di

$$\tfrac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}) + c = \tfrac{1}{4}t^{\frac{4}{3}} + c$$

da cui, sostituendo a t nuovamente $1+3\,\mathbf{sin}(x)$,

$$\int \sqrt[3]{1+3\,\mathbf{sin}(x)}\cdot \mathbf{cos}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(1+3\,\mathbf{sin}(x))^4} + c.$$

Esempio 24.5.9

Sia $\mathbf{I} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{\mathbf{sin}(x)}{\sqrt{\mathbf{cos}(x)}}\,\mathrm{d}x$ procedendo per sostituzione.

Poniamo $t := \mathbf{cos}(x)$ e scriviamo $\mathrm{d}t = -\,\mathbf{sin}(x)\,\mathrm{d}x$.

Ci si riconduce così al calcolo di

$$-\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = -\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{dt} = -\,2\,t^{\frac{1}{2}} + c = -\,2\sqrt{t} + c$$

da cui, sostituendo a t nuovamente $\mathbf{cos}(x)$,

$$\int \frac{\mathbf{sin}(x)}{\sqrt{\mathbf{cos}(x)}}\,\mathrm{d}x = -\,2\sqrt{\mathbf{cos}(x)} + c.$$

Esercizi

24.5.10 Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

24.5.11 Calcolare $\int |\, x \,|\,\mathrm{d}x$.

24.5.12 Calcolare $\int \sqrt{x}\,\mathbf{ln}(x)\,\mathrm{d}x$.

24.5.13 Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

24.5.14 Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

24.6 - Una primitiva per le funzioni razionali.

Siano **a**(x), **b**(x) due polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x; in questa sezione descriviamo un algoritmo che consente (purché si riesca ad effettuare la fattorizzazione di cui al terzo passo!) di ottenere **una** primitiva della funzione ("razionale") $\frac{\mathbf{a}(x)}{\mathbf{b}(x)}$. Notiamo che in generale le primitive di una stessa funzione razionale non differiscono fra loro per una costante (cfr. esempio 24.1.6).

Primo passo

Stiamo considerando una funzione razionale $\frac{\mathbf{a}(x)}{\mathbf{b}(x)}$, con **a**$(x)$ e **b**(x) polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x. Se il grado di **a**(x) è maggiore o uguale del grado di **b**(x), si effettua la divisione euclidea in modo da ottenere due polinomi **q**(x) e **r**(x) tali che

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{q}(x)\mathbf{b}(x) + \mathbf{r}(x)$$

col grado di **r**(x) minore del grado di **b**(x); cosicché

$$\frac{\mathbf{a}(x)}{\mathbf{b}(x)} = \frac{\mathbf{q}(x)\mathbf{b}(x)+\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}(x)} = \mathbf{q}(x) + \frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}(x)}$$

col grado di **r**(x) minore del grado di **b**(x).

Per il teorema 24.2.1, una primitiva di $\frac{\mathbf{a}(x)}{\mathbf{b}(x)}$ si ottiene sommando una primitiva di **q**(x) e una primitiva di $\frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}(x)}$. Sappiamo (essenzialmente grazie ancora al teorema 24.2.1) come ottenere tutte le primitive della funzione polinomiale **q**(x). Nei passi successivi vedremo come ottenere **una** primitiva per la funzione razionale $\frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}(x)}$, nella quale il grado di **r**(x) è minore del grado di **b**(x).

Se il grado di **a**(x) è già in partenza strettamente minore del grado di **b**(x), si pone **r**(x) := **a**(x) e si procede secondo i passi successivi.

Esempio 24.6.1

Sia data la funzione razionale

$$\frac{4x^6-6x^5+13x^4-14x^3+16x^2-9x+4}{2x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-2}.$$

Effettuando la divisione euclidea tra numeratore e denominatore, la possiamo scrivere come

$$(2x-1) + \frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{2x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-2}\ .$$

Secondo passo

Stiamo ora considerando una funzione razionale $\dfrac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}(x)}$, nella quale il grado di $\mathbf{r}(x)$ è minore del grado di $\mathbf{b}(x)$. Se il coefficiente del termine di grado massimo di $\mathbf{b}(x)$ è α, possiamo scrivere $\mathbf{b}(x) = \alpha\mathbf{b}_1(x)$ con $\mathbf{b}_1(x)$ polinomio nel quale il coefficiente del termine di grado massimo è 1; sarà allora

$$\frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}(x)} = \frac{\mathbf{r}(x)}{\alpha\,\mathbf{b}_1(x)} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}_1(x)}$$

e infine, per il teorema 24.2.1,

$$\int \frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int \frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}_1(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Dunque nel seguito descriveremo come trovare una primitiva per la funzione razionale $\dfrac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}_1(x)}$ nella quale il polinomio $\mathbf{b}_1(x)$ ha il coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1.

Esempio 24.6.2

Data la funzione razionale

$$\frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{2x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-2}\,,$$

si ha $\quad 2x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x - 2 = 2(x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1) \quad$ e dunque

$$\int \frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{2x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Terzo passo

Stiamo ora considerando una funzione razionale $\dfrac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}_1(x)}$, nella quale il grado di $\mathbf{r}(x)$ è minore del grado di $\mathbf{b}_1(x)$, e il coefficiente del termine di grado massimo in $\mathbf{b}_1(x)$ è 1.

Fattorizziamo $\mathbf{b}_1(x)$ scrivendolo come prodotto di polinomi irriducibili: si può dimostrare che tali polinomi irriducibili sono tutti di primo o secondo grado e hanno ciascuno il coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1. Sarà dunque

$$(\bigstar) \qquad \mathbf{b}_1(x) = (x-a_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{n_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_tx+q_t)^{m_t}.$$

Notiamo esplicitamente che questa fattorizzazione esiste certamente (lo si può dimostrare) ma *non conosciamo un algoritmo* per ottenerla.

Esempio 24.6.3

Sia $\mathbf{b}_1(x) := x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$. Poiché $\mathbf{b}_1(1) = 0$ (la scelta del valore 1 come possibile radice del polinomio può essere suggerita dall'intuito, oppure dalla teoria delle "equazioni reciproche", oppure da un clamoroso colpo di fortuna), si ha che $\mathbf{b}_1(x)$ è divisibile per $x - 1$. Effettuando la divisione, si ottiene che $\mathbf{b}_1(x) = (x-1)(x^4 + 2x^2 + 1)$ ed è facile riconoscere che $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$ con $x^2 + 1$ irriducibile. Dunque si ottiene la fattorizzazione $\mathbf{b}_1(x) = (x-1)(x^2+1)^2$.

Quarto passo

Stiamo ancora considerando una funzione razionale $\frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}_1(x)}$, nella quale il grado di $\mathbf{r}(x)$ è minore del grado di $\mathbf{b}_1(x)$, e il coefficiente del termine di grado massimo in $\mathbf{b}_1(x)$ è 1.

Si scrive ora $\frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}_1(x)}$ come somma di particolari funzioni razionali nel modo seguente:

– per ogni fattore di primo grado $(x - a)$ che compare (con esponente n) nella fattorizzazione ($\bigstar$) che abbiamo trovato per $\mathbf{b}_1(x)$ nel terzo passo, si considerano n addendi della forma

$$\frac{\mathrm{A}_1}{x-a}, \quad \frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^2}, \quad \dots, \quad \frac{\mathrm{A}_n}{(x-a)^n}$$

con $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$ numeri reali;

– per ogni fattore di secondo grado $(x^2 + px + q)$ che compare (con esponente n) nella fattorizzazione ($\bigstar$) che abbiamo trovato per $\mathbf{b}_1(x)$ nel terzo passo, si considerano n addendi della forma

$$\frac{\mathrm{B}_1 x + \mathrm{C}_1}{x^2+px+q}, \quad \frac{\mathrm{B}_2 x + \mathrm{C}_2}{(x^2+px+q)^2}, \quad \dots, \quad \frac{\mathrm{B}_n x + \mathrm{C}_n}{(x^2+px+q)^n}$$

con $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \dots, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_n$ numeri reali.

I numeri A_i, B_j, C_k si determinano come segue: si scrive esplicitamente la somma di tutti gli addendi come sopra considerati (che deve uguagliare $\frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}_1(x)}$); si riducono gli addendi allo stesso denominatore $\mathbf{b}_1(x)$; si esegue la somma degli addendi effettuando gli opportuni calcoli al numeratore, semplificando, e ordinando il numeratore così ottenuto secondo le potenze decrescenti della x; si impone che il numeratore abbia ordinatamente gli stessi coefficienti di $\mathbf{r}(x)$: ciò dà luogo a un sistema lineare, che si risolve con le tecniche viste nel capitolo 20. Si può dimostrare che tale sistema lineare ha sempre esattamente una soluzione.

Per il teorema 24.2.1, potremo ottenere una primitiva di $\frac{\mathbf{r}(x)}{\mathbf{b}_1(x)}$, e quindi poi una primitiva di $\frac{\mathbf{a}(x)}{\mathbf{b}(x)}$, se saremo in grado di determinare una primitiva per le funzioni

$$\frac{\mathrm{A}_n}{(x-a)^n} \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{B}_n x + \mathrm{C}_n}{(x^2+px+q)^n}$$

(quando il trinomio $x^2 + px + q$ è irriducibile).

È a questo problema che ci dedicheremo nel resto di questa sezione.

Esempio 24.6.4

Applichiamo il procedimento descritto nel “quarto passo” alla funzione razionale

$$\frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-2}$$

sapendo che (come si è visto nell’esempio 24.6.3)

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-1)(x^2+1)^2 \ .$$

Dobbiamo cercare dei numeri reali A, B, C, D, E in modo che sia

$$\frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-2} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+1} + \frac{\mathrm{D}x+\mathrm{E}}{(x^2+1)^2} \, .$$

Si ha

$$\frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+1} + \frac{\mathrm{D}x+\mathrm{E}}{(x^2+1)^2} = \frac{\mathrm{A}(x^2+1)^2+(\mathrm{B}x+\mathrm{C})(x-1)(x^2+1)+(\mathrm{D}x+\mathrm{E})(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(\mathrm{A+B})\,x^4+(-\mathrm{B+C})\,x^3+(2\mathrm{A+B-C+D})\,x^2+(-\mathrm{B+C-D+E})\,x+(\mathrm{A-C-E})}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-2}$$

cosicché deve essere

$$({}^0) \qquad \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 3 \\ -\mathrm{B} + \mathrm{C} = -2 \\ 2\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{C} + \mathrm{D} = 8 \\ -\mathrm{B} + \mathrm{C} - \mathrm{D} + \mathrm{E} = -3 \\ \mathrm{A} - \mathrm{C} - \mathrm{E} = 2 \end{cases}$$

e siamo ricondotti a risolvere il sistema lineare $({}^0)$ nelle incognite A, B, C, D, E. La sua matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

si riduce mediante le seguenti operazioni elementari sulle righe R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 :

$\mathrm{R}_3 := \mathrm{R}_3 - 2\mathrm{R}_1$;
$\mathrm{R}_5 := \mathrm{R}_5 - \mathrm{R}_1$;
$\mathrm{R}_4 := \mathrm{R}_4 + \mathrm{R}_3$;
$\mathrm{R}_2 \leftrightarrow \mathrm{R}_3$;
$\mathrm{R}_5 := \mathrm{R}_5 + \mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_4$;

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

da cui il sistema lineare, equivalente a $(^0)$,

$$\begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B}=3 \\ -\mathrm{B}-\mathrm{C}+\mathrm{D}=2 \\ -\mathrm{B}+\mathrm{C}=-2 \\ -2\mathrm{B}+\mathrm{E}=-1 \\ -4\mathrm{B}=-4 \end{cases}$$

e quindi, ricavando successivamente B (dall'ultima equzione), E (dalla quarta equazione), C (dalla terza equazione), D (dalla seconda equazione) e A (dalla prima equazione),

$$\mathrm{B}=1, \qquad \mathrm{E}=1, \qquad \mathrm{C}=-1, \qquad \mathrm{D}=2, \qquad \mathrm{A}=2$$

da cui infine

$$\frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} .$$

$\boxed{\text{Una primitiva per la funzione razionale } \frac{b}{(x-a)^n}}$

Si procede per sostituzione (cfr. sez. 24.4), ponendo $t := x-a$ cosicché $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$; siamo così condotti a determinare una primitiva per $\frac{b}{t^n}$ (ossia, per bt^{-n}) .

Si trova così che:

se $n=1$, una primitiva per la funzione razionale $\frac{b}{x-a}$ è $b\,\mathbf{ln}(|x-a|)$;

se $n \neq 1$, una primitiva per la funzione razionale $\frac{b}{(x-a)^n}$ è $\frac{b}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$.

Esempio 24.6.5

Cerchiamo una primitiva per la funzione razionale $\frac{2}{x-1}$. Poniamo $t := x - 1$, cosicché siamo ricondotti a calcolare

$$\int \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{ossia} \qquad 2\int t^{-1}\,\mathrm{d}t.$$

Poiché una primitiva di t^{-1} è $\mathbf{ln}(|t|)$, una primitiva per la funzione data è $2 \cdot \mathbf{ln}(|x-1|)$. Si noti che, poiché le primitive di t^{-1} non differiscono tutte per una costante (cfr. esempio 24.1.6), non si può scrivere

$$\int \frac{2}{x-1} = 2 \cdot \mathbf{ln}(|x-1|) + c.$$

Esempio 24.6.6

Cerchiamo una primitiva per la funzione razionale $\frac{7}{(x+3)^5}$.

Poniamo $t := x + 3$, cosicché siamo ricondotti a calcolare $\int \frac{7}{t^5}\,\mathrm{d}t$ ossia $7\int t^{-5}\,\mathrm{d}t$.

Poiché una primitiva di t^{-5} è $-\frac{1}{4}\,t^{-4}$, una primitiva per la funzione data è $\frac{-7}{4\,(x+3)^4}$.

Le primitive della funzione $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ quando il trinomio $x^2 + px + q$ è irriducibile

Osserviamo subito che, poiché $x^2 + px + q \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (altrimenti il trinomio $x^2 + px + q$ non sarebbe irriducibile!), la funzione $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ ha per dominio $\mathbb{R}$ e quindi (per il teorema 24.1.5) due sue primitive qualsiasi differiscono per una funzione costante.

Consideriamo in primo luogo il caso in cui $a \neq 0$. Osservando che

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2x+p+\left(\frac{2b}{a}-p\right)}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{2b}{a} - p\right) \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^n}$$

si può scrivere

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{2b}{a} - p\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Al primo addendo del secondo membro si può applicare il teorema 24.4.6 (con $\mathbf{g}(x) := x^2 + px + q$), dunque siamo ricondotti a determinare le primitive di

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n} \ .$$

Se invece $a = 0$, basta osservare che

$$\int \frac{b}{(x^2+px+q)^n} \, \mathrm{d}x = b \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} \, \mathrm{d}x$$

per essere comunque ricondotti a determinare le primitive di

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n} \ .$$

A tale scopo, si procede per sostituzione (cfr. sez. 24.4) ponendo $t := x + \frac{p}{2}$, da cui $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, $t^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ e quindi

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n} \, \mathrm{d}t \ .$$

Poiché il trinomio $x^2 + px + q$ è irriducibile, certamente si ha $p^2 - 4q < 0$ e dunque

$$q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Posto $m^2 := q - \frac{p^2}{4}$, dobbiamo quindi calcolare

$$\int \frac{1}{(t^2+m^2)^n} \, \mathrm{d}t \ .$$

A tale scopo, cominciamo col considerare il caso in cui $n = 1$; calcoliamo cioè

$$\int \frac{1}{t^2+m^2} \, \mathrm{d}t \ .$$

Si procede ancora per sostituzione, ponendo $y := \frac{t}{m}$ da cui $t = my$ e quindi $\mathrm{d}t = m\mathrm{d}y$.
Siamo così ricondotti a calcolare

$$\int \frac{1}{m^2y^2+m^2} \, m\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{m^2(y^2+1)} \, m\,\mathrm{d}y = \frac{1}{m} \int \frac{1}{y^2+1} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{m} \, \mathbf{arctg}(y) + c$$

e dunque

$\boxed{\text{F.1}}$
$$\int \frac{1}{t^2+m^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{m} \, \mathbf{arctg}\left(\frac{t}{m}\right) + c.$$

In conclusione, per $n = 1$, ricordando che $y = \frac{t}{m} = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$, si è trovato che

$$\boxed{\text{F.2}} \qquad \int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\textbf{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + c.$$

Vediamo infine come calcolare

$$\int \frac{1}{(t^2+m^2)^n}\,\mathrm{d}t$$

quando n è un numero naturale maggiore di 1.

Con un artificio, basato sulla "ricerca per parti" (cfr. sez. 24.3) ci ricondurremo al calcolo di

$$\int \frac{1}{(t^2+m^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}t$$

e quindi, dopo $n-1$ passi, al calcolo di

$$\int \frac{1}{t^2+m^2}\,\mathrm{d}t$$

che abbiamo già risolto con la F.1.

In effetti, si ha

$$\int \frac{1}{(t^2+m^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}t = \int \overset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{(t^2+m^2)^{n-1}}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+m^2)^{n-1}} - \int t \cdot \frac{2(1-n)t}{(t^2+m^2)^n}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t}{(t^2+m^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^n}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t}{(t^2+m^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{(t^2+m^2)-m^2}{(t^2+m^2)^n}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t}{(t^2+m^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \left(\frac{t^2+m^2}{(t^2+m^2)^n} - \frac{m^2}{(t^2+m^2)^n}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t}{(t^2+m^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{1}{(t^2+m^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}t - 2(n-1)m^2\int \frac{1}{(t^2+m^2)^n}\,\mathrm{d}t$$

da cui

$$2(n-1)m\int \frac{1}{(t^2+m^2)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+m^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{1}{(t^2+m^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}t$$

e quindi

$$\int \frac{1}{(t^2+m^2)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2(n-1)m^2(t^2+m^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)m^2}\int \frac{1}{(t^2+m^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}t$$

come si voleva ottenere.

In particolare, per $n := 2$, si ha

$$\int \frac{1}{(t^2+m^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2m^2(t^2+m^2)} + \frac{1}{2m^2}\int \frac{1}{t^2+m^2}\,\mathrm{d}t$$

e quindi, tenendo conto della F.1,

$\boxed{\text{F.3}}$ $$\int \frac{1}{(t^2+m^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2m^2(t^2+m^2)} + \frac{1}{2m^3}\,\mathbf{arctg}\left(\frac{t}{m}\right) + c.$$

Esempio 24.6.7

Calcoliamo $$\int \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Cercando di ottenere come addendo al numeratore la derivata del denominatore, scriviamo

$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

cosicché

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathbf{ln}(x^2+1) - \mathbf{arctg}(x) + c.$$

Esempio 24.6.8

Calcoliamo $$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poiché al numeratore compare già come addendo la derivata della base del denominatore, si ha

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{\boxed{\text{F.3}}}{=}$$

$$\overset{\boxed{\text{F.3}}}{=} -\frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{arctg}(x) + c = \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{arctg}(x) + c.$$

Esempio 24.6.9

Calcoliamo $$\int \frac{4x+18}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Cercando di ottenere come addendo al numeratore la derivata della base del denominatore, scriviamo

$$\frac{4x+18}{(x^2+6x+13)^2} = 2\cdot\frac{2x+6+3}{(x^2+6x+13)^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{2x+6}{(x^2+6x+13)^2} + 6\cdot\frac{1}{(x^2+6x+13)^2}$$

cosicché

$$\int \frac{4x+18}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int\frac{2x+6}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x + 6\int\frac{1}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x \overset{(30.4.5)}{=}$$

$$\overset{(30.4.5)}{=} \frac{-2}{x^2+6x+13} + 6\int\frac{1}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poniamo ora $t := x+3$, cosicché $x^2+6x+13 = t^2+4$ e $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Poiché

$$\int\frac{1}{(t^2+4)^2}\,\mathrm{d}t \overset{\boxed{\text{F.3}}}{=} \frac{t}{8(t^2+4)} + \frac{1}{16}\,\mathbf{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + c$$

si ha

$$\int\frac{1}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x+3}{8(x^2+6x+13)} + \frac{1}{16}\,\mathbf{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + c$$

e dunque infine

$$\int\frac{4x+18}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\frac{3x+1}{x^2+6x+13} + \frac{3}{8}\,\mathbf{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + c.$$

Esempio 24.6.10

Cerchiamo una primitiva per la funzione razionale

$$\frac{4x^6-6x^5+13x^4-14x^3+16x^2-9x+4}{2x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-2}.$$

tenendo conto dei risultati ottenuti negli esempi precedenti. Si ha:

$$\int \frac{4x^6-6x^5+13x^4-14x^3+16x^2-9x+4}{2x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-2}\,\mathrm{d}x \stackrel{(30.6.1)}{=}$$

$$\stackrel{(30.6.1)}{=} \int (2x-1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{2x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{2}\int \frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$$

e

$$\int \frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,\mathrm{d}x \stackrel{(30.6.1)}{=} \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Per quanto visto nell'esempio 24.6.5, una primitiva per $\frac{2}{x-1}$ è $2\cdot\mathbf{ln}(|x-1|)$. Tenendo conto anche degli esempi 24.6.7 e 24.6.8, si può concludere che una primitiva per

$$\frac{3x^4-2x^3+8x^2-3x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$$

è

$$2\cdot\mathbf{ln}(|x-1|) + \frac{1}{2}\mathbf{ln}(x^2+1) - \mathbf{arctg}(x) + \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\mathbf{arctg}(x)$$

ossia

$$2\cdot\mathbf{ln}(|x-1|) + \frac{1}{2}\mathbf{ln}(x^2+1) + \frac{x-2}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\mathbf{arctg}(x)$$

e dunque una primitiva per

$$\frac{4x^6-6x^5+13x^4-14x^3+16x^2-9x+4}{2x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-2}$$

è

$$x^2 - x + \mathbf{ln}(|x-1|) + \frac{1}{4}\mathbf{ln}(x^2+1) + \frac{x-2}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4}\mathbf{arctg}(x).$$

25.- ELEMENTI DI CALCOLO INTEGRALE

25.1 - Introduzione.

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $[a, b]$ superiormente limitata e non negativa. Si dice *trapezoide individuato da* **f** *su* $[a, b]$ l'insieme

$$\{\mathbf{P} \in \mathcal{P} \text{ di coordinate } (x, y) \ / \ a \le x \le b, 0 \le y \le \mathbf{f}(x)\}$$

ossia la porzione finita di piano delimitata dalle rette di equazioni $x = a$, $y = 0$, $x = b$ e dal grafico di **f**.

Per molte questioni ha interesse determinare un numero che possa essere considerato l'*area* del trapezoide individuato da **f** su $[a, b]$. Ciò è facilmente realizzabile in alcuni casi particolari, per i quali il trapezoide è una figura nota dalla geometria elementare: se **f** è la funzione costante uguale a λ, il trapezoide individuato da **f** è il rettangolo di base $b - a$ e altezza λ; la sua area è dunque $\lambda(b - a)$; se $\mathbf{f} := \mathbf{id}_{[a,b]}$, il trapezoide individuato da **f** è il trapezio di base minore a, base maggiore b e altezza $b - a$; la sua area è dunque $\frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2)$.

25.2 - La definizione di integrale per una funzione non negativa superiormente limitata.

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $[a, b]$ superiormente limitata e non negativa.

Per ogni scelta ϑ di un numero finito di punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tali che

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b,$$

posto $x_0 := a$ e $x_{n+1} := b$, siano per $i = 0, \ldots, n$

e_i l'estremo inferiore di **f** in $[x_i, x_{i+1}]$ ([35]) ;

E_i l'estremo superiore di **f** in $[x_i, x_{i+1}]$ ([36]) ;

e si ponga

$$\sigma_\vartheta := \sum_{i=0}^{n} e_i(x_{i+1} - x_i); \qquad \sigma^\vartheta := \sum_{i=0}^{n} E_i(x_{i+1} - x_i).$$

---

[35] L'estremo inferiore esiste per la completezza di $\mathbb{R}$, perché per ipotesi **f** è inferiormente limitata (da 0).

[36] L'estremo superiore esiste per la completezza di $\mathbb{R}$, perché per ipotesi **f** è superiormente limitata.

Si noti che ciascun addendo $e_i(x_{i+1} - x_i)$ che compare nella definizione di σ_ϑ rappresenta l'area del rettangolo di base $(x_{i+1} - x_i)$ e altezza e_i; un tale rettangolo si può considerare "inscritto" nel trapezoide individuato da **f** su $[x_i, x_{i+1}]$ e la sua area può essere vista come un'approssimazione per difetto dell'area del trapezoide. Di conseguenza σ_ϑ si può considerare un'approssimazione per difetto del numero che vogliamo definire.

Analogamente, ciascun addendo $E_i(x_{i+1} - x_i)$ che compare nella definizione di σ^ϑ rappresenta l'area del rettangolo di base $(x_{i+1} - x_i)$ e altezza E_i; un tale rettangolo si può considerare "circoscritto" al trapezoide individuato da **f** su $[x_i, x_{i+1}]$ e la sua area può essere vista come un'approssimazione per eccesso dell'area del trapezoide. Di conseguenza σ^ϑ si può considerare un'approssimazione per eccesso del numero che vogliamo definire.

Sia λ una limitazione superiore per **f** in $[a, b]$: allora $e_i \leq \lambda$ per ogni i e per ogni ϑ; dunque

$$\sigma_\vartheta := \sum_{i=0}^{n} e_i(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n} \lambda(x_{i+1} - x_i) = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) = \lambda(b - a)$$

ossia l'insieme dei σ_ϑ è superiormente limitato; per la completezza di $\mathbb{R}$, esiste

$$\textbf{sup}\ \sigma_\vartheta .$$

Analogamente, poiché $\sigma^\vartheta \geq 0$ per ogni ϑ (essendo per ipotesi **f** non negativa e dunque $e_i \geq 0$ per ogni i), l'insieme dei σ^ϑ è inferiormente limitato; per la completezza di $\mathbb{R}$, esiste

$$\textbf{inf}\ \sigma^\vartheta .$$

La funzione **f** si dice *integrabile* (*secondo Riemann*) *su* $[a, b]$ se risulta

$$\textbf{sup}\ \sigma_\vartheta = \textbf{inf}\ \sigma^\vartheta .$$

In tale caso, il numero **sup** σ_ϑ $(= \textbf{inf}\ \sigma^\vartheta)$ si dice *integrale di* **f** *su* $[a, b]$ (oppure *integrale di* **f** *tra* a *e* b; i numeri reali a e b si dicono *estremi di integrazione*) e si indica col simbolo

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{o anche col simbolo} \qquad \int_a^b \mathbf{f} .$$

L'integrale di **f** su $[a, b]$ viene assunto come area del trapezoide individuato da **f** su $[a, b]$.

Esempio 25.2.1

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, e sia **f** la funzione costante uguale a λ. Si verifica facilmente che **f** è integrabile su ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e che si ha

$$\int_a^b \lambda\, \mathrm{d}x = \lambda(b - a).$$

Esempio 25.2.2

Sia **f** la funzione di Dirichlet su $[0, 1]$ così definita:

$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La funzione **f** non è integrabile su $[0, 1]$ perché $\sigma_\vartheta = 1$ e $\sigma^\vartheta = 2$ per ogni scelta ϑ di un numero finito di punti tra 0 e 1 (ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ comprende infatti sia numeri razionali sia numeri irrazionali).

25.3 - Prime proprietà dell'integrale.

Teorema 25.3.1

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite su $[a, b]$, superiormente limitate e non negative. Se **f** e **g** sono integrabili su $[a, b]$, anche $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ lo è, e si ha

$$\int_a^b (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \int_a^b \mathbf{f} + \int_a^b \mathbf{g}\,.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 25.3.2

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita su $[a, b]$, superiormente limitata e non negativa. Se **f** è integrabile su $[a, b]$, allora

(1) comunque presi $\alpha, \beta \in [a, b]$ (con $\alpha < \beta$), **f** è integrabile su $[\alpha, \beta]$;

(2) per ogni $c \in (a, b)$ si ha

$$\int_a^b \mathbf{f} = \int_a^c \mathbf{f} + \int_c^b \mathbf{f}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

25.4 - Estensione della definizione di integrale alle funzioni che assumono valori negativi.

Teorema 25.4.1

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali. Allora

(1) ogni funzione $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita su $[a, b]$ e limitata si può esprimere come differenza di due funzioni definite su $[a, b]$, superiormente limitate e non negative;

(2) siano $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ superiormente limitate, non negative e integrabili su $[a, b]$; se $\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2$, si ha

$$\int_a^b \mathbf{g}_1 - \int_a^b \mathbf{g}_2 = \int_a^b \mathbf{h}_1 - \int_a^b \mathbf{h}_2 .$$

Dimostrazione — Proviamo la (1).

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita su $[a, b]$ e limitata e sia λ una limitazione inferiore per $\mathbf{f}$: se $\lambda \geq 0$, $\mathbf{f}$ è essa stessa non negativa e si può scrivere $\mathbf{f} = \mathbf{f} - 0$; se invece $\lambda < 0$ si ha $\mathbf{f} = (\mathbf{f} - \lambda) - (-\lambda)$ con $\mathbf{f} - \lambda$ e $-\lambda$ superiormente limitate e non negative.

Proviamo ora la (2).

Siano $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ superiormente limitate, non negative e integrabili su $[a, b]$ tali che $\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2$. Allora $\mathbf{g}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 + \mathbf{g}_2$ e dunque per il teorema 25.3.1

$$\int_a^b \mathbf{g}_1 + \int_a^b \mathbf{h}_2 = \int_a^b \mathbf{h}_1 + \int_a^b \mathbf{g}_2$$

come si voleva.

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione definita su $[a, b]$ e limitata. Si dice che $\mathbf{f}$ è *integrabile* (*secondo Riemann*) *su* $[a, b]$ se esistono due funzioni $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ definite su $[a, b]$, superiormente limitate e non negative, integrabili (secondo Riemann) su $[a, b]$, tali che $\mathbf{f} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$; in tale caso il numero

$$\int_a^b \mathbf{g}_1 - \int_a^b \mathbf{g}_2$$

si dice *integrale di* $\mathbf{f}$ *su* $[a, b]$ (oppure *integrale di* $\mathbf{f}$ *tra* a *e* b) e si indica col simbolo

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{o anche col simbolo} \qquad \int_a^b \mathbf{f} .$$

Per il teorema 25.4.1, questa definizione è ben posta. Inoltre, se $\mathbf{f}$ è essa stessa non negativa si può porre $\mathbf{f} = \mathbf{f} - 0$; perciò (cfr. esempio 25.2.1) questa definizione estende quella data nella sez. 25.2.

Si dimostrano gli analoghi dei teoremi 25.3.1 e 25.3.2. Precisamente:

Teorema 25.4.2

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e siano **f**, **g** funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite su $[a, b]$ e limitate. Se **f** e **g** sono integrabili su $[a, b]$, anche $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ lo è, e si ha

$$\int_a^b (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \int_a^b \mathbf{f} + \int_a^b \mathbf{g}\,.$$

Teorema 25.4.3

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita su $[a, b]$ e limitata. Se **f** è integrabile su $[a, b]$, allora

(1) comunque presi $\alpha, \beta \in [a, b]$ (con $\alpha < \beta$), **f** è integrabile su $[\alpha, \beta]$;

(2) per ogni $c \in (a, b)$ si ha

$$\int_a^b \mathbf{f} = \int_a^c \mathbf{f} + \int_c^b \mathbf{f}\,.$$

Osservazione 25.4.4

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita su $[a, b]$ e limitata. Se **f** è integrabile su $[a, b]$, allora anche $-\mathbf{f}$ è integrabile su $[a, b]$ e si ha

$$\int_a^b (-\mathbf{f}) = -\int_a^b \mathbf{f}.$$

Teorema 25.4.5

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita su $[a, b]$ e limitata. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se **f** è integrabile su $[a, b]$, allora anche $\lambda\mathbf{f}$ è integrabile su $[a, b]$ e si ha

$$\int_a^b (\lambda \mathbf{f}) = \lambda \int_a^b \mathbf{f}.$$

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema. Si noti comunque che in base all'osservazione 25.4.4 è sufficiente provare l'asserto per $\lambda \in \mathbb{R}^+$; è poi chiaro che ci si riconduce subito al caso in cui **f** è non negativa su $[a, b]$.

Teorema 25.4.6

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali. Ogni funzione continua in $[a, b]$ è limitata e integrabile su $[a, b]$.

Dimostrazione — Omettiamo la dimostrazione di questo teorema. Si noti che l'ipotesi di continuità in $[a, b]$ comporta (per il teorema di Weierstrass, 16.2.2) la limitatezza in $[a, b]$.

25.5 - Estensione della definizione di integrale fra a e b al caso in cui $b \leq a$.

Sia $[\alpha, \beta]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia **f** una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile su $[\alpha, \beta]$ e limitata.

Se $c \in [\alpha, \beta]$, si pone per definizione

$$\int_c^c \mathbf{f} = 0.$$

Tale definizione è suggerita dal desiderio di estendere il teorema 25.4.3 al caso in cui $c = a$ oppure $c = b$: dovrà infatti aversi per $a, b \in [\alpha, \beta]$ (con $a < b$)

$$\int_a^b \mathbf{f} = \int_a^a \mathbf{f} + \int_a^b \mathbf{f} = \int_a^b \mathbf{f} + \int_b^b \mathbf{f}.$$

Siano infine $a, b \in [\alpha, \beta]$ con $b < a$. Si pone

$$\int_a^b \mathbf{f} := -\int_b^a \mathbf{f}.$$

Anche questa definizione è suggerita dal desiderio di mantenere la validità dell'enunciato del teorema 25.4.3: dovrà infatti aversi

$$0 = \int_a^a \mathbf{f} = \int_a^b \mathbf{f} + \int_b^a \mathbf{f}.$$

In effetti, si prova facilmente che con questa nuova definizione è

$$\int_a^b \mathbf{f} = \int_a^c \mathbf{f} + \int_c^b \mathbf{f}$$

per ogni scelta di $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ (e quindi anche se $c \notin [a, b]$).

25.6 - Il teorema fondamentale del calcolo.

Sia **I** un intervallo di numeri reali (non escludendo che possa essere $\mathbf{I} = \mathbb{R}$), sia **f** integrabile su ogni intervallo chiuso contenuto in **I** e sia $c \in \mathbf{I}$. Si dice *funzione integrale individuata da* **f** *e* c *su* **I** la funzione

$$\mathbf{F}_{(c)}(x) := \int_c^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Teorema 25.6.1 (“Teorema fondamentale del calcolo”)

Sia **I** un intervallo di numeri reali, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{I})$.

(1) Per ogni $c \in \mathbf{I}$, la funzione integrale individuata da **f** e c su **I** è una primitiva di **f** in **I**.

(2) Se **I** è un intervallo limitato e chiuso, $\mathbf{I} := [a, b]$, per ogni primitiva $\mathbf{F}_0$ di **f** in $[a, b]$ si ha

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{F}_0(b) - \mathbf{F}_0(a).$$

Dimostrazione — Per il teorema 25.4.6, ha senso considerare la funzione integrale individuata da **f** e c su **I**; sia essa $\mathbf{F}_{(c)}$.

Omettiamo la dimostrazione del punto (1) e proviamo soltanto il punto (2).

È immediato che

$$\mathbf{F}_{(c)}(b) - \mathbf{F}_{(c)}(a) = \int_c^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^a \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^c \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

D’altro lato, per ogni primitiva $\mathbf{F}_0$ di **f** in $[a, b]$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{(c)} + \lambda$ (teorema 24.1.5).

Dunque per ogni primitiva $\mathbf{F}_0$ di **f** in $[a, b]$ si ha

$$\mathbf{F}_0(b) - \mathbf{F}_0(a) = \mathbf{F}_{(c)}(b) + \lambda - (\mathbf{F}_{(c)}(a) + \lambda) = \mathbf{F}_{(c)}(b) - \mathbf{F}_{(c)}(a) = \int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

come si voleva.

Osservazione 25.6.2

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e chiuso di numeri reali, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}([a, b])$. Per il teorema fondamentale del calcolo (25.6.1), il problema di valutare

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

può essere ricondotto a quello, già considerato nel capitolo 24, di determinare una primitiva di $\mathbf{f}$ in $[a, b]$. Vale la pena di osservare che tale procedimento teorico non è però mai quello effettivamente implementato per il calcolo numerico su elaboratore elettronico. Ai cosiddetti "metodi numerici" per il calcolo degli integrali non possiamo tuttavia in questa sede nemmeno accennare.

Esempio 25.6.3

Sia $\mathbf{f}$ la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\mathbf{f}(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Ricordando che $\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x$ per $\mathbf{f}$ limitata non negativa (e $a < b$) è stato definito in modo da poter essere interpretato come l'area del trapezoide individuato da $\mathbf{f}$ su $[a, b]$, non sorprenderà che si abbia

(per $a < b$)
$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{se } b < 0 \\ b & \text{se } a < 0 \text{ e } b \geq 0 \\ b - a & \text{se } a \geq 0. \end{cases}$$

Poniamo $\mathbf{F}_{(0)}(x) := \int_0^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$ (cosicché $\mathbf{F}_{(0)}$ è la funzione integrale individuata da $\mathbf{f}$ e 0). Allora

$$\mathbf{F}_{(0)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

La funzione integrale $\mathbf{F}_{(0)}$ non è derivabile in 0, quindi non è una primitiva di $\mathbf{f}$. Ciò mostra che la (1) del teorema fondamentale del calcolo non vale se la funzione $\mathbf{f}$ non è continua.

Esempio 25.6.4

Calcoliamo $$\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x.$$

Poiché la funzione $\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}$ è continua in $[0, 8]$, possiamo applicare il teorema 25.6.1. Cerchiamo una primitiva di tale funzione: si ha

$$\int (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cdot\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$$

e quindi

$$\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{2}\cdot\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^8 = \tfrac{100}{3}.$$

Esempio 25.6.5

Calcoliamo $$\int_1^4 \frac{\mathbf{ln}(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Poiché la funzione integranda è continua in $[1, 4]$, possiamo applicare il teorema 25.6.1. Cerchiamo una primitiva di tale funzione: si ha

$$\int \frac{\mathbf{ln}(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \mathbf{ln}(x)\,x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathbf{ln}(x) - \int \frac{1}{x}\cdot(2x^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\sqrt{x}\,\mathbf{ln}(x) - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathbf{ln}(x) - 2(2\sqrt{x}) + c = 2\sqrt{x}\,(\mathbf{ln}(x) - 2) + c$$

e quindi

$$\int_1^4 \frac{\mathbf{ln}(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\,(\mathbf{ln}(x) - 2)\right]_1^4 = 4(\mathbf{ln}(4) - 1).$$

Esempio 25.6.6

Calcoliamo $$\int_1^2 \frac{1}{x(1+\mathbf{ln}(x))}\,\mathrm{d}x.$$

Poiché la funzione integranda è continua in $[1, 2]$, possiamo applicare il teorema 25.6.1.

Cerchiamo una primitiva di tale funzione in $[1, 2]$: per calcolare

$$\int \frac{1}{x(1+\mathbf{ln}(x))} \, \mathrm{d}x$$

si può procedere per sostituzione, ponendo $t := 1 + \mathbf{ln}(x)$ e, di conseguenza, $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Ci si riconduce così al calcolo di $\displaystyle\int t^{-1}\,\mathrm{d}t$

e poiché x varia tra 1 e 2 (e quindi t varia tra 1 e $1 + \mathbf{ln}(2)$, dunque $t > 0$) si trova ad esempio la primitiva $\mathbf{ln}(t)$. Perciò, sostituendo a t nuovamente $1 + \mathbf{ln}(x)$, si trova che in $[1, 2]$ è

$$\int \frac{1}{x(1+\mathbf{ln}(x))}\,\mathrm{d}x = \mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x) + 1)$$

e quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{x(1+\mathbf{ln}(x))} \, \mathrm{d}x = [\mathbf{ln}(\mathbf{ln}(x) + 1)]_1^2 = \mathbf{ln}\,(\mathbf{ln}\,(2) + 1).$$

$\boxed{\text{Esempio 25.6.7}}$

Calcoliamo $\displaystyle\int_0^2 x\,\sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

Poiché la funzione integranda è continua in $[0, 2]$, possiamo applicare il teorema 25.6.1. Cerchiamo una primitiva di tale funzione: per calcolare

$$\int x\sqrt{4 - x^2}\ \mathrm{d}x$$

si può procedere per sostituzione, ponendo $t := 4 - x^2$ e, di conseguenza,

$$\mathrm{d}t = -2\,x\,\mathrm{d}x.$$

Ci si riconduce così al calcolo di

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + c$$

da cui, sostituendo a t nuovamente $4 - x^2$,

$$\int x\sqrt{4 - x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(4 - x^2)^{\frac{3}{2}} + c.$$

e quindi

$$\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

25.7 - Calcolo di aree mediante integrali.

Siano a, b numeri reali, e siano $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabili su $[a, b]$. Se $\mathbf{f}(x) \geq \mathbf{g}(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, il numero reale

$$\int_a^b (\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x))\, \mathrm{d}x$$

si assume quale area della porzione finita di piano delimitata dalle rette di equazioni

$$x = a \qquad \text{e} \qquad x = b$$

e dai grafici delle funzioni **f** e **g**.

Tale convenzione copre una situazione più generale di quella considerata in 25.1 ma è con essa coerente: infatti se **f** è non negativa in $[a, b]$ il trapezoide individuato da **f** in $[a, b]$ è la porzione finita di piano delimitata dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ e dai grafici della funzione **f** e della funzione costante identicamente nulla.

Esempio 25.7.1

Determinare l'area della porzione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$ e dall'asse delle ascisse.

Soluzione — La parabola data incontra l'asse delle ascisse nei punti $\mathbf{A} \equiv (-1, 0)$ e $\mathbf{B} \equiv (3, 0)$. Posto

$$\mathbf{f}(x) := 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{g}(x) := x^2 - 2x - 3$$

la porzione di piano descritta si può pensare delimitata dalle rette di equazioni $x = -1$ e $x = 3$ e dai grafici delle funzioni **f** e **g**. Poiché $\mathbf{f} \geq \mathbf{g}$ in $[-1, 3]$, l'area cercata è

$$\int_{-1}^{3} (0 - (x^2 - 2x - 3))\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, \mathrm{d}x.$$

Poichè una primitiva di $-x^2 + 2x + 3$ è $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$, l'area cercata è

$$\left[-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = -\tfrac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + 3 \cdot 3 - (-\tfrac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)) = \tfrac{32}{3}.$$

Si noti che la porzione di piano considerata coincide col trapezoide individuato da **g** sull'intervallo $[-1, 3]$; ma l'area cercata <u>non</u> è

$$\int_{-1}^{3} \mathbf{g}(x)\, \mathrm{d}x$$

perché **g** risulta negativa in $[-1, 3]$.

Esempio 25.7.2

Siano $\mathbf{A} \equiv (-\pi, 0)$, $\mathbf{B} \equiv (\pi, 0)$. Determinare l'area della porzione finita di piano delimitata dal grafico della funzione **sin** e dal segmento **AB**.

Soluzione — La porzione di piano descritta risulta ben individuata perchè il grafico della funzione **sin** incontra l'asse delle ascisse nei punti **A** e **B**. Posto $\mathbf{f}(x) := 0$ e $\mathbf{g}(x) := \mathbf{sin}(x)$, tale porzione di piano si può pensare delimitata dalle rette di equazioni $x = -\pi$ e $x = \pi$ e dai grafici delle funzioni **f** e **g**. Poiché in $[-\pi, \pi]$ non è né $\mathbf{f} \geq \mathbf{g}$ ovunque né $\mathbf{g} \geq \mathbf{f}$ ovunque, non possiamo ottenere l'area cercata calcolando un solo integrale fra $-\pi$ e π. Osservando però che la funzione **sin** è dispari (cfr. 15.4), e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine, possiamo stabilire che l'area cercata è

$$2 \cdot \int_0^{\pi} \mathbf{sin}(x)\, \mathrm{d}x.$$

Per calcolare tale numero, osserviamo che una primitiva di $\mathbf{sin}(x)$ è $-\mathbf{cos}(x)$; pertanto l'area cercata è

$$2 \cdot [-\mathbf{cos}(x)]_0^{\pi} = 2 \cdot (-\mathbf{cos}(\pi) - (-\mathbf{cos}(0))) = 2 \cdot (1 + 1) = 4.$$

Esempio 25.7.3

Determinare l'area della porzione finita di piano delimitata dalle parabole

$$y = -2x^2 + \tfrac{7}{2}x \qquad \text{e} \qquad y = x^2 - 4x + 3$$

Soluzione — La porzione di piano descritta risulta ben individuata perchè le parabole date si incontrano nei punti $\mathbf{A} \equiv (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ e $\mathbf{B} \equiv (2, -1)$.

Poiché le parabole date sono il grafico delle funzioni polinomiali $\mathbf{f}(x) := -2x^2 + \frac{7}{2}x$ e $\mathbf{g}(x) := x^2 - 4x + 3$, e poiché si ha $\mathbf{f}(x) \geq \mathbf{g}(x)$ per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 2]$, l'area richiesta è

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} (\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x))\, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (-3x^2 + \tfrac{15}{2}x - 3)\, \mathrm{d}x = \left[-x^3 + \tfrac{15}{4}x^2 - 3x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \tfrac{27}{16}.$$

Esempio 25.7.4

Determinare l'area della porzione finita di piano delimitata dai grafici delle funzioni $\mathbf{f}(x) := x^3$ e $\mathbf{g}(x) := \frac{1}{x}$, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = 2$.

Soluzione — Il grafico di **f** incontra l'asse delle ascisse nell'origine e incontra il grafico di **g** nel punto $\mathbf{P} \equiv (1, 1)$. La porzione finita di piano considerata è dunque l'unione di due trapezoidi: quello individuato da **f** su $[0, 1]$ e quello individuato da **g** su $[1, 2]$. Pertanto l'area cercata è $\displaystyle\int_0^1 x^3\, \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = [\tfrac{1}{4}x^4]_0^1 + [\mathbf{ln}(x)]_1^2 = \tfrac{1}{4} + \mathbf{ln}(2).$

Esempio 25.7.5

Determinare l'area della porzione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e^x, dall'asse delle ordinate e dalla retta di equazione $y = 3$.

Soluzione – Il grafico di e^x incontra la retta $y = 3$ nel punto $\mathbf{P} \equiv (\mathbf{ln}(3), 3)$; inoltre, in $[0, \mathbf{ln}(3)]$ si ha $3 \geq e^x$. Pertanto l'area cercata è

$$\int_0^{\mathbf{ln}(3)} (3 - e^x)\,\mathrm{d}x = [3x - e^x]_0^{\mathbf{ln}(3)} = 3 \cdot \mathbf{ln}(3) - 2.$$

Esercizio 25.7.6

Siano $p, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Determinare l'area della porzione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = 2px$ e dalla retta di equazione $x = \alpha$.

Esercizio 25.7.7

Sia Γ l'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$ e sia **P** un punto del ramo di Γ contenuto nel primo quadrante. Sia ***t*** la tangente in **P** a Γ, sia **Q** il punto in cui ***t*** incontra l'asse delle ascisse e sia ***r*** la retta passante per **Q** parallela all'asse delle ordinate.
Determinare l'area della porzione finita di piano delimitata da Γ, ***t*** e ***r***.

25.8 - Integrazione su intervalli illimitati.

In questa sezione mostriamo come si può estendere la nozione di "integrale" a funzioni continue definite su un intervallo non limitato ([37]).

Sia $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua sull'intervallo chiuso illimitato $[a, +\infty)$. Per ogni b appartenente a tale intervallo, esiste allora l'integrale

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se esiste $$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I} \qquad \text{con } \mathrm{I} \in \mathbb{R}$$

si dice che **f** è *integrabile su* $[a, +\infty)$ (oppure che *l'integrale di* **f** *tra* a *e* $+\infty$ *converge*) e si pone per definizione

$$\int_a^{+\infty} \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}\,.$$

[37] Si parla in questo caso di "integrale generalizzato" oppure "integrale improprio".

In caso contrario, si dice che **f** *non è integrabile* tra a *e* $+\infty$. Se

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$$

si dice talvolta che *l'integrale di* **f** *tra* a *e* $+\infty$ *diverge*.

Sia ora invece $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua sull'intervallo chiuso illimitato $(-\infty, b]$. Per ogni a appartenente a tale intervallo, esiste allora l'integrale

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se esiste $$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I} \quad \text{con } \mathrm{I} \in \mathbb{R}$$

si dice che **f** è *integrabile su* $(-\infty, b]$ (oppure che *l'integrale di* **f** *tra* $-\infty$ *e* b *converge*) e si pone per definizione $$\int_{-\infty}^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}\,.$$

In caso contrario, si dice che **f** *non è integrabile tra* $-\infty$ *e* b. Se

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$$

si dice talvolta che *l'integrale di* **f** *tra* $-\infty$ *e* b *diverge*.

Sia infine $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su tutto $\mathbb{R}$, e sia $a \in \mathbb{R}$. Si dice che **f** è *integrabile su* $\mathbb{R}$ se è integrabile tra $-\infty$ e a e tra a e $+\infty$, e si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} \mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

È facile dimostrare che tale definizione è ben posta, ossia <u>non</u> dipende dal particolare punto a scelto.

Esempio 25.8.1

Calcoliamo, qualora esista, $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Si ha $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} [\mathbf{ln}(x)]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \mathbf{ln}(b) = +\infty$$

e dunque l'integrale proposto diverge.

Esempio 25.8.2

Calcoliamo, qualora esista, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Si ha $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \Big[-\frac{1}{x} \Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1.$$

Esempio 25.8.3

Calcoliamo, qualora esista, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Si ha $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} [\mathbf{arctg}(x)]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} [\mathbf{arctg}(x)]_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (-\mathbf{arctg}(a)) + \lim_{b\to+\infty} (\mathbf{arctg}(b)) = -(-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2} = \pi.$$

25.9 - Integrazione di funzioni non limitate.

In questa sezione mostriamo come si può estendere la nozione di “integrale” a funzioni continue non limitate in un intervallo ([38]).

Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua sull'intervallo chiuso limitato $[a, b]$. Sappiamo dal teorema fondamentale del calcolo che la funzione integrale
$$\mathbf{F}_{(a)}(x) := \int_a^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$$
è continua in $[a, b]$. In particolare si ha dunque
$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Ciò suggerisce come tentare di estendere la definizione di integrale tra a e b di $\mathbf{f}$ quando $\mathbf{f}$ è continua nell'intervallo $[a, b)$ ma non è definita in b ed eventualmente non è limitata in $[a, b)$.

[38] Si parla anche in questo caso di “integrale generalizzato” oppure “integrale improprio”.

Sia **f** continua nell'intervallo $[a, b)$ (e quindi integrabile in ogni suo sottointervallo chiuso). Se esiste

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \mathrm{I} \qquad \text{con } \mathrm{I} \in \mathbb{R}$$

si dice che **f** è *integrabile su* $[a, b)$ (oppure che *l'integrale di* **f** *su* $[a, b)$ *converge*) e si pone per definizione

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{x \to b^-} \int_a^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

In caso contrario, si dice che **f** *non è integrabile su* $[a, b)$. Se

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \pm\infty$$

si dice talvolta che *l'integrale di* **f** *su* $[a, b)$ *diverge*.

Analogamente, se **f** è continua nell'intervallo $(a, b]$ ma non è definita in a, si pone per definizione

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{x \to a^+} \int_x^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$$

qualora tale limite esista e sia finito.

Supponiamo infine che **f** sia definita nell'intervallo $[a, b]$ e presenti una singolarità in un punto c interno ad $[a, b]$. Si dice che **f** è *integrabile su* $[a, b]$ se è integrabile su $[a, c)$ e su $(c, b]$ e si pone in tal caso

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^c \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_c^b \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Esempio 25.9.1

Calcoliamo, qualora esista, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

Per definizione, tale integrale vale

$$\lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{b \to 1^-} \Big[-2\sqrt{1-x} \Big]_0^b \;=\; \lim_{b \to 1^-} \left(-2\sqrt{1-b} + 2 \right) = 2.$$

26.- EQUAZIONI DIFFERENZIALI

26.1 - Equazioni funzionali.

Abbiamo visto finora vari esempi di equazioni *numeriche*. Onestamente, va detto che non abbiamo dato mai dato una definizione generale di questo concetto: comunque l'idea è sostanzialmente quella di un'uguaglianza fra espressioni contenenti lettere, per la quale ci chiediamo quali valori numerici (in insiemi precedentemente dichiarati) vadano assegnati ad alcune delle lettere (dette *incognite*) affinché l'uguaglianza risulti vera (qualunque sia il valore numerico assegnato alle restanti lettere, dette *parametri*). È proprio l'uso del vago termine "espressioni" che rende questo discorso impreciso.

Nella sez. 1.6 abbiamo definito con sufficiente precisione che cos'è una *equazione algebrica* in un insieme $\mathbf{A}$. Lo stesso concetto è stato ripetuto, con riferimento all'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, nella sez. 14.1. Non sarebbe difficile utilizzare la stessa tecnica per definire che cos'è una *equazione trigonometrica*, oppure una *equazione logaritmica*, oppure una *equazione esponenziale* in $\mathbb{R}$. Nell'esempio 16.2.5 abbiamo lasciato intravedere come ogni funzione $\mathbf{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possa dar luogo a un'equazione in $\mathbb{R}$ quando ci si chieda quali siano i valori reali da assegnare alla x affinché risulti verificata l'uguaglianza

$$\mathbf{f}(x) = 0\,.$$

In tutti questi casi le funzioni coinvolte nelle espressioni considerate sono note, e ciò che si cerca è un valore *numerico* da assegnare a una prefissata lettera (oppure più valori numerici da assegnare a più prefissate lettere) affinché quella certa uguaglianza fra espressioni risulti vera.

Quando abbiamo un'uguaglianza fra espressioni nelle quali compaiono (indicate con lettere) funzioni non note di una prefissata variabile[39] e ci chiediamo *quali funzioni* sostituite a quelle non note rendano vera l'uguaglianza[40], si parla di *equazioni funzionali*. Ancora una volta non abbiamo dato una definizione rigorosa; lo faremo volta per volta nei casi (molto particolari) che tratteremo. Invitiamo comunque il lettore a considerare l'idea di "equazione funzionale" come una generalizzazione dell'idea di "equazione numerica": infatti le equazioni numeriche si possono interpretare come equazioni funzionali per le quali le soluzioni vadano cercate soltanto nella famiglia delle funzioni costanti.

---

[39] o di più prefissate variabili, cioè funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; ma questi casi esulano dai limiti della nostra trattazione.

[40] Il lettore ricorderà che già nella nota 10 a pagina 36 abbiamo discusso di uguaglianza tra funzioni.

Esempio 26.1.1

Se ci chiediamo per quali funzioni $\mathbf{y}(x)$ si abbia

(*) $$\mathbf{y}(x+z) = \mathbf{y}(x) + \mathbf{y}(z)$$

siamo di fronte a un'equazione funzionale (nell'incognita **y**) . Le soluzioni (e la facilità di trovarle) dipendono moltissimo dall'insieme nel quale cerchiamo le nostre funzioni. Anche dando per scontato che lavoriamo con funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ci sono tante possibilità.
Se cerchiamo le soluzioni nell'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in un prefissato intervallo, possiamo ragionare come segue. La (*) deve valere per ogni scelta di x e z, quindi in particolare le funzioni di x ottenute fissando z sia al primo che al secondo membro devono coincidere; e anche le loro derivate devono coincidere, quindi

(**) $$\mathbf{y'}(x+z) = \mathbf{y'}(x)\,.$$

Poiché la (**) deve valere per ogni numero reale z, la funzione derivata $\mathbf{y'}(x)$ deve essere una funzione costante a; la $\mathbf{y}(x)$ che cerchiamo è insomma una primitiva della funzione costante a. Dunque (poiché $\mathbf{y}(x)$ ha per dominio un intervallo) esiste una costante c tale che
$$\mathbf{y}(x) = ax + c\,.$$
Sostituendo nella (*) si trova che deve essere
$$a(x+z) + c = (ax+c) + (az+c)$$
da cui $c = 0$. D'altro lato, ogni funzione $\mathbf{y}(x) := ax$ con $a \in \mathbb{R}$ verifica la (*). Pertanto abbiamo dimostrato che (nell'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili in un prefissato intervallo) l'equazione funzionale (*) ha infinite soluzioni tutte della forma
$$\mathbf{y}(x) = ax$$
al variare del numero reale a .
Con molta più fatica, si trova che la (*) ha esattamente le stesse soluzioni nell'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Invece, nell'insieme di *tutte* le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci sono anche *altre soluzioni*, che però non siamo qui in grado di precisare.

26.2 - Introduzione alle equazioni differenziali.

Un'equazione funzionale nella quale compaiano (anche) le derivate della funzione incognita (o delle funzioni incognite) si dice una *equazione differenziale*. Nel seguito considereremo soltanto equazioni differenziali con una sola funzione incognita.

Un'equazione differenziale ha in genere, come vedremo, infine soluzioni. I grafici delle soluzioni di una equazione differenziale si dicono *curve integrali* dell'equazione differenziale data. Per individuare una particolare soluzione di un'equazione differenziale spesso è sufficiente l'ulteriore condizione che la curva integrale corrispondente passi per un assegnato punto del piano; si richiede cioè che la soluzione assuma un prefissato valore in un certo punto. Ciò si esprime attraverso il cosiddetto *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y'}(x), \mathbf{y''}(x), ..., \mathbf{y}^{(n)}(x)) = 0 \\ \mathbf{y}(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y'}(x), \mathbf{y''}(x), ..., \mathbf{y}^{(n)}(x)) = 0$ è l'equazione differenziale data e $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Naturalmente, nel proporre l'equazione differenziale si deve specificare un insieme $\mathcal{I}$ (generalmente un intervallo, eventualmente tutto $\mathbb{R}$) e le soluzioni si cercano nell'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con dominio $\mathcal{I}$; è chiaro quindi che deve essere $x_0 \in \mathcal{I}$.

Esempio 26.2.1

Sia data una funzione $\mathbf{f}(x)$. L'equazione differenziale nell'incognita $\mathbf{y}(x)$

$$\mathbf{y'}(x) = \mathbf{f}(x)$$

chiede di trovare tutte le primitive di $\mathbf{f}$ (le soluzioni si cercano nell'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con dominio $\mathcal{D}(\mathbf{f})$) . Questo è un problema che abbiamo già affrontato nei capitoli 24 e 25; in particolare, il teorema 25.6.1 ("teorema fondamentale del calcolo") ci dice che: se $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ è un intervallo e $\mathbf{f}$ è continua, per ogni c appartenente a $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ c'è una soluzione data da

$$\mathbf{y}(x) := \int_c^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Inoltre, il teorema 24.1.5 ci dice che tutte le soluzioni differiscono fra loro per una costante. Dunque, se $x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{f})$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, l'unica soluzione $\overline{\mathbf{y}}(x)$ tale che $\overline{\mathbf{y}}(x_0) = y_0$ è data da

$$\overline{\mathbf{y}}(x) := \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t + y_0\,.$$

Esempio 26.2.2

Precisiamo l'esempio precedente esaminando un caso specifico, anche per sottolineare che non sempre si deve ricorrere al "teorema fondamentale del calcolo". Sia dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y'}(x) - \mathbf{cos}(x) = 0 \\ \mathbf{y}(0) = 7\,. \end{cases}$$

L'equazione differenziale proposta (che si può scrivere come $\mathbf{y'}(x) = \mathbf{cos}(x)$) chiede di trovare una primitiva (in $\mathbb{R}$) di $\mathbf{cos}(x)$; la condizione aggiuntiva chiede che tale primitiva assuma in 0 valore 7. Sappiamo che $\mathbf{sin}(x)$ è una primitiva di $\mathbf{cos}(x)$; poiché $\mathbf{sin}(0) = 0$, la soluzione del problema di Cauchy considerato è

$$\mathbf{y}(x) := \mathbf{sin}(x) + 7\,.$$

26.3 - Equazioni differenziali lineari.

Sia $\mathcal{I}$ un intervallo di numeri reali, e siano $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathcal{I})$. Si dice equazione differenziale lineare (individuata da **f** e **g**) la

(*) $$\mathbf{y'}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x)\,.$$

La (*) si dice *omogenea* quando **g** è la funzione identicamente nulla, si dice *affine* in tutti gli altri casi.

Teorema 26.3.1

Sia $\mathcal{I}$ un intervallo di numeri reali, e sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathcal{I})$. Sia **F** una primitiva di **f** in $\mathcal{I}$. Le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea

26.3.E1 $$\mathbf{y'}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{y}(x)$$

sono tutte e sole le funzioni della forma $ce^{\mathbf{F}(x)}$ con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione — Per dimostrare che $\mathbf{y}(x) := ce^{\mathbf{F}(x)}$ (con **F** primitiva di **f** in $\mathcal{I}$ e $c \in \mathbb{R}$) è soluzione della 26.3.E1, basta sostituire:

$$\mathbf{y'}(x) = ce^{\mathbf{F}(x)}\mathbf{F'}(x) = ce^{\mathbf{F}(x)}\mathbf{f}(x) = \mathbf{y}(x)\mathbf{f}(x)\,.$$

Resta da verificare che non ci sono altre soluzioni. Sia $\overline{\mathbf{y}}(x)$ una soluzione della 26.3.E1. Allora

$$\overline{\mathbf{y}}'(x) - \mathbf{f}(x)\overline{\mathbf{y}}(x) = 0$$

e moltiplicando per $e^{-\mathbf{F}(x)}$ si ottiene

$$0 = e^{-\mathbf{F}(x)}\overline{\mathbf{y}}'(x) - e^{-\mathbf{F}(x)}\mathbf{f}(x)\overline{\mathbf{y}}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-\mathbf{F}(x)}\overline{\mathbf{y}}(x)\right)$$

da cui, in base al teorema 18.2.5,

$$e^{-\mathbf{F}(x)}\overline{\mathbf{y}}(x) = c \quad (\text{con } c \in \mathbb{R}) \quad \text{in } \mathcal{I}$$

ossia

$$\overline{\mathbf{y}}(x) = ce^{\mathbf{F}(x)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

come si voleva.

Esempio 26.3.2

Supponiamo di voler studiare la crescita di una coltura di mocroorganismi, esprimendone il volume **v** in funzione del tempo t misurato a partire da un certo istante iniziale nel quale il volume è una quantità nota v_0. Osservazioni sperimentali hanno mostrato che la velocità di crescita (cioè la derivata della funzione $\mathbf{v}(t)$ rispetto a t) è direttamente proporzionale secondo una costante α sia a t che a $\mathbf{v}(t)$. Qual è la legge che esprime il volume della coltura in funzione di t?

Si deve risolvere l'equazione differenziale lineare omogenea $\mathbf{v'}(t) = (\alpha t)\mathbf{v}(t)$.

Poiché una primitiva della funzione αt è $\frac{1}{2}\alpha t^2$, in base al teorema 26.3.1 le soluzioni di tale equazione differenziale sono tutte e sole le funzioni della forma

$$\mathbf{v}(t) := ce^{\frac{1}{2}\alpha t^2}.$$

La soluzione che interessa a noi sarà individuata osservando che per $t = 0$ deve essere $\mathbf{v}(0) = v_0$. Dunque deve essere $c = v_0$.

Teorema 26.3.3

Sia $\mathcal{I}$ un intervallo di numeri reali, e siano $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathcal{I})$. Sia $\mathbf{F}$ una primitiva di $\mathbf{f}$ in $\mathcal{I}$, e sia $\boldsymbol{\varphi}$ una primitiva di $\dfrac{\mathbf{g}(x)}{e^{\mathbf{F}(x)}}$ in $\mathcal{I}$. Le soluzioni dell'equazione differenziale lineare affine

26.3.E2 $$\mathbf{y'}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x)$$

sono tutte e sole le funzioni della forma $ce^{\mathbf{F}(x)} + e^{\mathbf{F}(x)}\boldsymbol{\varphi}(x)$ con $c \in \mathbb{R}$.

In particolare, una soluzione dell'equazione 26.3.E2 è data da $e^{\mathbf{F}(x)}\boldsymbol{\varphi}(x)$, e tutte le altre si ottengono da essa sommandovi una soluzione dell'equazione differenziale omogena "associata" 26.3.E1.

Dimostrazione — Dimostriamo in primo luogo che le soluzioni della 26.3.E2 sono tutte e sole le funzioni si ottengono sommando a una qualsiasi di esse una soluzione dell'equazione differenziale omogenea "associata" 26.3.E1.

Sia $\mathbf{y}_0(x)$ una fissata soluzione della 26.3.E2. Se $\mathbf{y}_1(x)$ è un'altra soluzione della 26.3.E2, si ha che

$$\mathbf{y}_1'(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{y}_1(x) + \mathbf{g}(x)$$

$$\mathbf{y}_0'(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{y}_0(x) + \mathbf{g}(x)$$

da cui, sottraendo membro a membro,

$$\mathbf{y}_1'(x) - \mathbf{y}_0'(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{y}_1(x) + \mathbf{g}(x) - (\mathbf{f}(x)\mathbf{y}_0(x) + \mathbf{g}(x))$$

ossia

$$(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0)'(x) = \mathbf{f}(x)(\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_0(x)) = \mathbf{f}(x)((\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0)(x))$$

e questo prova che $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0$ è soluzione dell'equazione differenziale omogenea "associata" 26.3.E1. In altri termini, $\mathbf{y}_1$ $(= \mathbf{y}_0 + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0))$ si ottiene sommando a $\mathbf{y}_0$ una soluzione della 26.3.E1.

Viceversa, sommiamo alla fissata soluzione $\mathbf{y}_0(x)$ della 26.3.E2 una qualsiasi soluzione $\overline{\mathbf{y}}(x)$ della 26.3.E1. Si ha

$$(\mathbf{y}_0(x) + \overline{\mathbf{y}}(x))' = \mathbf{y}_0'(x) + \overline{\mathbf{y}}'(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{y}_0(x) + \mathbf{g}(x) + \mathbf{f}(x)\overline{\mathbf{y}}(x) = \mathbf{f}(x)(\mathbf{y}_0(x) + \overline{\mathbf{y}}(x)) + \mathbf{g}(x)$$

e dunque la $\mathbf{y}_0(x) + \overline{\mathbf{y}}(x)$ è soluzione della 26.3.E2.

Resta da provare che $e^{\mathbf{F}(x)}\boldsymbol{\varphi}(x)$ è soluzione della $\boxed{26.3.E2}$, ma questo si riduce a una semplice verifica:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\mathbf{F}(x)}\boldsymbol{\varphi}(x)\right) = e^{\mathbf{F}(x)}\mathbf{f}(x)\boldsymbol{\varphi}(x) + e^{\mathbf{F}(x)}\frac{\mathbf{g}(x)}{e^{\mathbf{F}(x)}} = e^{\mathbf{F}(x)}\boldsymbol{\varphi}(x)\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)$$

come si voleva.

$\boxed{\text{Esempio 26.3.4}}$

Risolviamo l'equazione differenziale

$$x^2\mathbf{y'}(x) - x\mathbf{y}(x) = 1$$

nell'intervallo $\mathcal{I} := (0, +\infty)$ (osserviamo che necessariamente $0 \notin \mathcal{D}(\mathbf{y})$).

Con opportuni passaggi l'equazione data si può scrivere come

$$\mathbf{y'}(x) = \tfrac{1}{x}\mathbf{y}(x) + \tfrac{1}{x^2}$$

e dunque si tratta di una equazione differenziale omogenea affine. Con riferimento all'enunciato del teorema 26.3.3, si ha $\mathbf{f}(x) := \frac{1}{x}$ e $\mathbf{g}(x) := \frac{1}{x^2}$. Una primitiva di $\mathbf{f}$ in $\mathcal{I}$ è $\mathbf{F}(x) := \mathbf{ln}(x)$, una primitiva di $\frac{\mathbf{g}(x)}{e^{\mathbf{F}(x)}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{x} = \frac{1}{x^3}$ è $\boldsymbol{\varphi}(x) := -\frac{1}{2x^2}$ e dunque la generica soluzione è della forma

$$\mathbf{y}(x) := cx - \tfrac{1}{2x}\,.$$

26.4 - Equazioni differenziali “a variabili separabili”.

Concludiamo questo breve cenno sulle equazioni differenziali con la famiglia delle equazioni che si possono scrivere nella forma

$$\mathbf{y'}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(\mathbf{y}(x))$$

e che sono dette “a variabili separabili” per il metodo, di facile memorizzazione, che si usa per cercare di risolverle.

Teorema 26.4.1

Sia $\mathcal{I}$ un intervallo di numeri reali, sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(0)}(\mathcal{I})$ e sia **g** continua.

Sia **F** una primitiva di **f** in $\mathcal{I}$, e sia Γ una primitiva di $\frac{1}{\mathbf{g}}$: le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale "a variabili separabili"

26.4.E1 $$\mathbf{y'}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(\mathbf{y}(x))$$

sono tutte e sole le funzioni $\mathbf{y}(x)$ tali che, in un opportuno sottointervallo di $\mathcal{I}$,

$$\Gamma(\mathbf{y}(x)) = \mathbf{F}(x) + c \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, se esiste $y_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{g})$ tale che $\mathbf{g}(y_0) = 0$, la funzione costante

$$\mathbf{y}(x) := y_0$$

è soluzione della 26.4.E1.

Dimostrazione — È chiaro che se $\mathbf{y}(x)$ verifica l'uguaglianza

$$\Gamma(\mathbf{y}(x)) = \mathbf{F}(x) + c$$

deve verificare anche l'uguaglianza che si ottiene derivandone ambo i membri rispetto a x, ossia la

$$\frac{1}{\mathbf{g}(\mathbf{y}(x))}\mathbf{y'}(x) = \mathbf{f}(x)$$

da cui la 26.4.E1.

È anche immediato che se $\mathbf{g}(y_0) = 0$ la funzione costante $\mathbf{y}(x) := y_0$ è soluzione della 26.4.E1 (basta sostituire per convincersene).

Supponiamo ora che $\overline{\mathbf{y}}(x)$ sia soluzione (non costante) della 26.4.E1. Allora

$$\overline{\mathbf{y}}'(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(\overline{\mathbf{y}}(x))$$

e (in ogni intervallo $\mathcal{J}$ tale che $\mathbf{g}(\overline{\mathbf{y}}(x)) \neq 0$ per ogni $x \in \mathcal{J}$) possiamo dividere ambo i membri per $\mathbf{g}(\overline{\mathbf{y}}(x))$, ottenendo

$$\frac{\overline{\mathbf{y}}'(x)}{\mathbf{g}(\overline{\mathbf{y}}(x))} = \mathbf{f}(x)$$

Se il primo e il secondo membro rappresentano la stessa funzione, una qualsiasi primitiva in $\mathcal{I}$ del primo membro differisce da una qualsiasi primitiva del secondo membro per una funzione costante; dunque, con la notazione del teorema, si ha

$$\Gamma(\overline{\mathbf{y}}(x)) = \mathbf{F}(x) + c \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}$$

come si voleva.

Osservazione 26.4.2

Mnemonicamente, il procedimento espresso dal teorema 26.4.1 si ricorda scrivendo l'equazione 26.4.E1 nella forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(y)$$

e poi "separando le variabili" x e y (moltiplicando ambo i membri per $\mathrm{d}x$ e dividendo ambo i membri per $\mathbf{g}(y)$).

A questo punto si ottiene l'uguaglianza

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathbf{g}(y)} = \mathbf{f}(x)\mathrm{d}x$$

che suggerisce di cercare le primitive di ambo i membri

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathbf{g}(y)} = \int \mathbf{f}(x)\mathrm{d}x$$

ottenendo così la relazione

$$\Gamma(\mathbf{y}(x)) = \mathbf{F}(x) + c \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}$$

dalla quale, in base al teorema 26.4.1, si ricavano tutte le soluzioni non costanti $\mathbf{y}(x)$ dell'equazione differenziale data.

Le soluzioni y_0 dell'equazione numerica $\mathbf{g}(y) = 0$ forniscono invece le eventuali soluzioni costanti

$$\mathbf{y}(x) := y_0$$

dell'equazione differenziale data.

Esempio 26.4.3

Risolviamo l'equazione differenziale

$$\mathbf{y'}(x)\mathbf{tg}(x) = \mathbf{y}(x)$$

nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Scrivendola come

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)} = \mathbf{y}(x)$$

si possono "separare le varibili" ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathbf{cos}(x)}{\mathbf{sin}(x)}\mathrm{d}x$$

e quindi

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathbf{cos}(x)}{\mathbf{sin}(x)}\mathrm{d}x$$

ossia

$$\mathbf{ln}(|y|) = \mathbf{ln}(|\mathbf{sin}(x)|) + c\,.$$

Ma allora deve essere anche

$$\mathbf{exp}(\mathbf{ln}(|y|) = \mathbf{exp}(\mathbf{ln}(|\mathbf{sin}(x)|) + c)$$

ossia

$$|y| = e^c|\mathbf{sin}(x)| = c_0|\mathbf{sin}(x)| \quad \text{(avendo posto } c_0 := e^c\text{)}$$

e infine

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{sin}(x) \quad \text{con } c_1 \in \mathbb{R}$$

lasciando assumere a c_1 qualsiasi valore reale (anche negativo) ed eliminando di conseguenza il “valore assoluto”. Si noti che nei passaggi formali utilizzati per giungere alla soluzione si è diviso per $\mathbf{sin}(x)$, che nell’intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ si annulla per $x = 0$; tuttavia le soluzioni trovate sono accettabili su tutto l’intervallo considerato, come si può verificare direttamente.

Esempio 26.4.4

Consideriamo ora l’equazione differenziale

$$\mathbf{y'}(x)\mathbf{y}(x) + x = 0\,\mathbf{.}$$

Scrivendola come

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathbf{y}(x) = -x$$

si possono “separare le varibili” ottenendo

$$y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x$$

e quindi

$$\int y\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x$$

da cui

$$\tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + c$$

ossia

$$x^2 + y^2 + c_0 = 0 \quad \text{(avendo posto } c_0 := -2c\text{)}\,.$$

La $\mathbf{y}(x)$ in questo caso si può dunque ricavare soltanto “localmente” (cioè in opportuni intervalli) e soltanto per valori negativi di c_0. Le curve integrali sono circonferenze con centro nell’origine e raggio $\sqrt{c_0}$.

Esempio 26.4.5

Risolviamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y'}(x) = e^{x-\mathbf{y}(x)} \\ \mathbf{y}(0) = 2\,. \end{cases}$$

L'equazione differenziale proposta si può scrivere come

$$\mathbf{y'}(x) = \frac{e^x}{e^{\mathbf{y}(x)}}$$

ed è dunque a varibili separabili. Separando le variabili si arriva alla scrittura

$$e^y \mathrm{d}y = e^x \mathrm{d}x$$

e quindi

$$\int e^y \mathrm{d}y = \int e^x \mathrm{d}x$$

da cui

$$e^y = e^x + c$$

ossia

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{ln}\left(e^x + c\right)\,.$$

La condizione $\mathbf{y}(0) = 2$ ci dice che deve essere $\mathbf{ln}\left(e^0 + c\right) = 2$ ossia $1 + c = e^2$ e dunque $c := e^2 - 1$. La soluzione del problema di Cauchy proposto è dunque

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{ln}\left(e^x + e^2 - 1\right)\,.$$