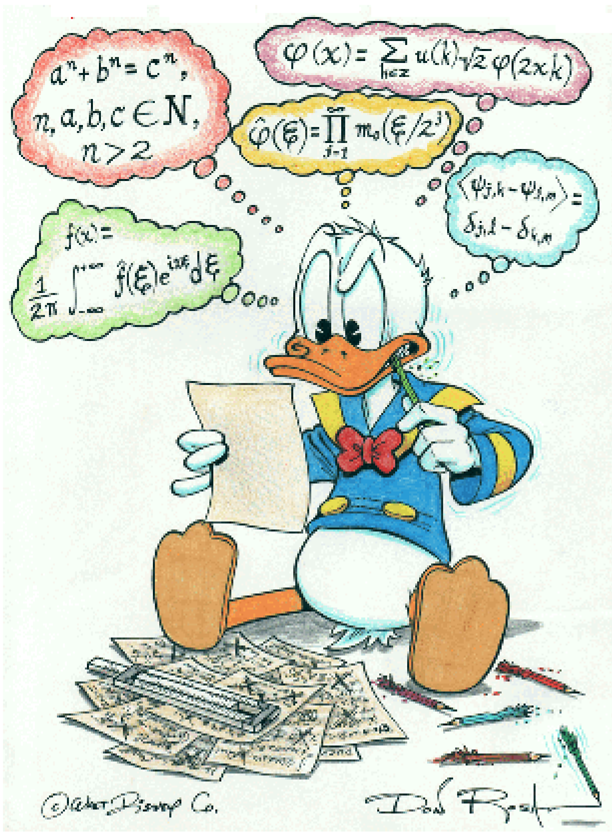
Marco Barlotti

RICHIAMI SU

ISOMETRIE, ANGOLI ORIENTATI E TRIGONOMETRIA PIANA

Vers. 2.1



In copertina un disegno originale (© Disney) di Keno Don Rosa.

PREFAZIONE

Questi appunti, mantenendo fede al proprio titolo, raccolgono le informazioni essenziali su isometrie, angoli e trigonometria piana.

I prerequisiti fondamentali per l'insegnamento di "Matematica e statistica" (corso di laurea triennale in Scienze Naturali presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali all'Università di Firenze) sono più che altro quelli del capitolo R3, cioè la definizione delle funzioni trigonometriche $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e le loro principali proprietà. D'altro canto, come introdurre tali concetti senza una chiara e univoca definizione di "*angolo*"? Ecco, a tale scopo, il capitolo R2. E come parlare rigorosamente di "angoli" senza la nozione di "*isometria*"? Del resto lo studio delle isometrie, pur essendo basilare nella cultura matematica dello scienziato, non è ancora purtroppo uniformemente diffuso nella Scuola Secondaria. Ecco dunque giustificato il capitolo R1, che descrive in maniera sufficientemente esauriente le isometrie costituendo nel contempo un'applicazione semplice ma non banale del metodo delle coordinate.

Molti risultati, specialmente nel capitolo 1, sono accompagnati dalle relative dimostrazioni. Non sarà inutile ribadire qui che tutta la materia di questi appunti non è oggetto dell'esame di "Matematica e statistica", e che quindi in particolare tali dimostrazioni sono riportate a puro titolo esercitativo (spesso, come si diceva, si tratta di facili applicazioni del metodo delle coordinate).

Sono anche proposti alcuni esercizi, sempre nell'ottica di un utile ma non indispensabile approfondimento; quelli più difficili sono contrassegnati con un asterisco fra parentesi quadre ([*]).

Come sempre, sarò grato a tutti coloro, e specialmente agli studenti, che vorranno segnalarmi qualunque difetto di questi appunti, dai più banali errori di stompa alle oscurità nell'esposizione.

Firenze, 06.10.2008

Marco Barlotti

SOMMARIO

R1.- LE ISOMETRIE DEL PIANO

R1.1 - Introduzione.

Nei "Fondamenti della Geometria" di Hilbert, la nozione di *congruenza* è assunta come concetto primitivo per i segmenti e gli angoli ([3], cap. 1, sez. 5) ma non viene data in generale per le figure piane: la definizione di Hilbert per la *congruenza* fra triangoli ([3], cap. 1, sez. 6) si estende facilmente solo ai poligoni. Negli ultimi decenni ha assunto sempre maggiore importanza lo studio delle isometrie, che permettono di dare una definizione di congruenza non solo più generale di quella di Hilbert ma anche più precisa (nel senso che è possibile distinguere due tipi di congruenza, quella "diretta" e quella "inversa"); al punto che alcuni autori hanno costruito sistemi di assiomi per la geometria piana in cui le isometrie giocano un ruolo essenziale (si veda ad esempio l'App. 1 di [2]).

In questo capitolo forniamo le nozioni essenziali sulle isometrie (che dovrebbero peraltro risultare note dalla Scuola Secondaria) mantenendoci all'interno del sistema hilbertiano di assiomi. Nelle dimostrazioni si è privilegiato l'uso della Geometria Analitica, anche se sarebbe stato sempre possibile utilizzare soltanto i più elementari teoremi di Geometria piana; in questo modo lo studio delle isometrie fornisce un significativo esempio della potenza e della semplicità del "metodo delle coordinate".

Utilizzeremo le notazioni di [1]. In particolare, se $\mathbf{f}$ è una funzione indicheremo con $\mathcal{D}(\mathbf{f})$ il dominio di $\mathbf{f}$ (cfr. [1], 4.3); se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sono punti dello spazio, indicheremo con $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ la distanza fra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (cfr. [1], 10.2).

R1.2 - Definizione di "isometria" e prime proprietà.

Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei punti del piano.

Si dice *isometria* (*del piano*) una funzione $\sigma : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ tale che $\mathcal{D}(\sigma) = \mathcal{P}$ e

R1.2.F1 $$d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = d(\sigma(\mathbf{P}), \sigma(\mathbf{Q})) \qquad \forall\, \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathcal{P}.$$

La condizione R1.2.F1 si esprime talvolta dicendo che "σ conserva le distanze".

Come sinonimo di *isometria* si usa anche il termine *congruenza*.

Teorema R1.2.1

Ogni isometria è una corrispondenza biunivoca $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$.

Dimostrazione – Sia σ un'isometria. Per definizione, σ è una funzione $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ e $\mathcal{D}(\sigma) = \mathcal{P}$; per la R1.2.F1, σ porta punti distinti in punti distinti e dunque è iniettiva. Resta da provare che σ è suriettiva.

Sia **P'** $\in \mathcal{P}$; vogliamo trovare un punto **P** $\in \mathcal{P}$ per il quale $\sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{P'}$. Scegliamo due punti del piano (distinti fra loro) $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$. Se $\sigma(\mathbf{P_1}) = \mathbf{P'}$ oppure $\sigma(\mathbf{P_2}) = \mathbf{P'}$, abbiamo concluso la nostra ricerca. Altrimenti, consideriamo le seguenti due circonferenze: $\mathcal{C}_1$, di centro $\sigma(\mathbf{P_1})$ e passante per **P'**; e $\mathcal{C}_2$, di centro $\sigma(\mathbf{P_2})$ e passante per **P'**.

Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ hanno in comune il solo punto **P'**, i loro raggi r_1 e r_2 sono legati alla distanza dei centri dalla relazione $d(\sigma(\mathbf{P_1}), \sigma(\mathbf{P_2})) = r_1 + r_2$.
Poiché

$$d(\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}) = d(\sigma(\mathbf{P_1}), \sigma(\mathbf{P_2})),$$

le circonferenze di centro $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ aventi raggio rispettivamente r_1 e r_2 hanno anch'esse in comune un solo punto $\mathbf{P_0}$; allora $\sigma(\mathbf{P_0})$, che per la R1.2.F1 deve avere distanza r_1 da $\sigma(\mathbf{P_1})$ e distanza r_2 da $\sigma(\mathbf{P_2})$, non può essere che **P'**.

Non molto diversamente si ragiona se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ hanno in comune un altro punto **Q'** oltre a **P'**; i loro raggi r_1 e r_2 sono in questo caso legati alla distanza dei centri dalla relazione

$$d(\sigma(\mathbf{P_1}), \sigma(\mathbf{P_2})) < r_1 + r_2$$

e poiché

$$d(\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}) = d(\sigma(\mathbf{P_1}), \sigma(\mathbf{P_2})),$$

le circonferenze di centro $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ aventi raggio rispettivamente r_1 e r_2 hanno anch'esse in comune esattamente due punti $\mathbf{P_0}$ e $\mathbf{Q_0}$. Sempre per la R1.2.F1, $\sigma(\mathbf{P_0})$ e $\sigma(\mathbf{Q_0})$ devono coincidere (non necessariamente nell'ordine) con **P'** e **Q'**.

Teorema R1.2.2

La composizione di due isometrie è un'isometria. Ogni isometria è invertibile, e la sua inversa è un'isometria. L'identità $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ è un'isometria.

Dimostrazione – Ovvio.

Esercizio [*] R1.2.3

Indichiamo con $\mathcal{I}$ l'insieme delle isometrie del piano. Usando il teorema R1.2.2 (e il teorema 4.7.4 di [1]), si provi che $(\mathcal{I}, \circ)$ è un gruppo (cfr. [1], 8.1) e, più precisamente, un sottogruppo (cfr. [1], 8.2) del gruppo di tutte le corrispondenze biunivoche $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ([1], esempio 8.1.5).

Teorema R1.2.4

Una isometria σ trasforma

- la retta **AB** nella retta $\sigma(\mathbf{A})\sigma(\mathbf{B})$;
- il segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ nel segmento $\overline{\sigma(\mathbf{A})\sigma(\mathbf{B})}$ (che risulta avere la stessa misura di $\overline{\mathbf{AB}}$);
- la semiretta di origine **A** contenente **B** nella semiretta di origine $\sigma(\mathbf{A})$ contenente $\sigma(\mathbf{B})$;
- la circonferenza di centro **C** e raggio r nella circonferenza di centro $\sigma(\mathbf{C})$ e raggio r;
- il cerchio di centro **C** e raggio r nel cerchio di centro $\sigma(\mathbf{C})$ e raggio r.

Dimostrazione – Ricordando che un punto **P** appartiene a un segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ se e soltanto se

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = d(\mathbf{A}, \mathbf{P}) + d(\mathbf{P}, \mathbf{B}),$$

è facile verificare le prime tre affermazioni. Le altre due sono immediate.

Teorema R1.2.5

Sia σ un'isometria. Se σ ha due punti fissi distinti **A** e **B**, tutti i punti della retta **AB** sono fissi per σ.

Dimostrazione – Sia **P** un punto della retta **AB**. Sia $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$ la circonferenza di centro **A** passante per **P**; e sia $\mathcal{C}_{\mathbf{B}}$ la circonferenza di centro **B** passante per **P**. Poiché i punti **A**, **B**, **P** sono allineati, $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$ e $\mathcal{C}_{\mathbf{B}}$ sono tangenti (esternamente se **P** sta fra **A** e **B**, internamente in caso contrario) e hanno in comune il solo punto **P**. Per il teorema R1.2.4, σ muta in sé $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$ e muta in sé $\mathcal{C}_{\mathbf{B}}$; dunque σ muta in sé **P**, come si voleva dimostrare.

Teorema R1.2.6

Se un'isometria ha tre punti fissi non allineati, è l'identità.

Dimostrazione – Sia σ un'isometria che ha tre punti fissi non allineati **A**, **B** e **C**. Vogliamo dimostrare che ogni punto del piano è fisso per σ.

Per il teorema R1.2.5, tutti i punti della rette **AB**, **AC** e **BC** sono fissi per σ. Sia **P** un altro punto del piano; per **P** passano infinite rette del piano, delle quali una sola passa per **A**, una sola passa per **B** e una sola passa per **C**: possiamo dunque scegliere una retta $\boldsymbol{r}$ passante per **P** ma non passante né per **A** né per **B** né per **C**. La retta $\boldsymbol{r}$ può essere parallela ad al più una delle tre rette **AB**, **AC** e **BC** (altrimenti i tre punti **A**, **B**, **C** sarebbero allineati); dunque incontra almeno due di esse in due punti **Q**, **R** necessariamente distinti fra loro (se incontrasse le rette, ad es., **AB** e **BC** in uno stesso punto **Q**, le rette **AB** e **BC** avrebbero in comune due punti distinti **B** e **Q**, quindi coinciderebbero, quindi **A**, **B** e **C** sarebbero allineati contro la nostra ipotesi). Ma allora la retta $\boldsymbol{r}$ ha due punti **Q**, **R** fissi per σ; per il teorema R1.2.5, tutti i punti di $\boldsymbol{r}$, e fra essi **P**, sono fissi per σ.

Corollario R1.2.7

Se due isometrie operano allo stesso modo su tre punti non allineati, esse coincidono.

Dimostrazione – Siano σ_1, σ_2 isometrie e siano **A**, **B** e **C** tre punti non allineati per i quali si ha

$$\sigma_1(\mathbf{A}) = \sigma_2(\mathbf{A}), \quad \sigma_1(\mathbf{B}) = \sigma_2(\mathbf{B}) \quad \text{e} \quad \sigma_1(\mathbf{C}) = \sigma_2(\mathbf{C}).$$

Allora

$$(\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1)(\mathbf{A}) = \mathbf{A}, \quad (\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1)(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \quad \text{e} \quad (\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1)(\mathbf{C}) = \mathbf{C}.$$

Ma $(\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1)$ è un'isometria (per il teorema R1.2.2) e dunque è l'identità (per il teorema R1.2.6). Dunque

$$\sigma_2 = \sigma_2 \circ \mathbf{id}_{\mathcal{P}} = \sigma_2 \circ (\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1) = (\sigma_2 \circ \sigma_2^{-1}) \circ \sigma_1 = \mathbf{id}_{\mathcal{P}} \circ \sigma_1 = \sigma_1$$

come si voleva dimostrare.

Osservazione R1.2.8

Si riferisca il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico ***Oxy***. Proveremo col teorema R3.5.4 che ogni isometria ha equazioni della forma

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$$

(ma, si badi bene, equazioni di questa forma non descrivono necessariamente un'isometria!).
Per il corollario R1.2.7, i coefficienti a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 possono essere determinati conoscendo le immagini di tre punti non allineati. Particolarmente comodi risultano i calcoli quando si conoscono le immagini di $\mathbf{O} \equiv (0,0)$, $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}} \equiv (1,0)$ e $\mathbf{U}_{\boldsymbol{y}} \equiv (0,1)$; infatti l'immagine di **O** ha coordinate (c_1, c_2), l'immagine di $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$ ha coordinate $(a_1 + c_1, a_2 + c_2)$ e l'immagine di $\mathbf{U}_{\boldsymbol{y}}$ ha coordinate $(b_1 + c_1, b_2 + c_2)$.

Teorema R1.2.9

Comunque presi due punti distinti **A** e **B**, esiste al più una isometria non identica che lascia fissi sia **A** che **B**.

Dimostrazione – Sia σ una isometria non identica che lascia fissi **A** e **B**; proviamo che per ogni punto **P** del piano $\sigma(\mathbf{P})$ resta univocamente determinato. Se **P** appartiene alla retta **AB**, deve essere $\sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ per il teorema R1.2.5. Se **P** non appartiene alla retta **AB**, le circonferenze $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$ e $\mathcal{C}_{\mathbf{B}}$ (di centro rispettivamente **A** e **B**, e passanti per **P**) sono secanti e hanno in comune esattamente due punti, **P** e un altro punto **P'**. Poiché **A** e **B** sono punti fissi per σ, per il teorema R1.2.4 σ muta in sé ciascuna delle due circonferenze $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}$ e $\mathcal{C}_{\mathbf{B}}$, pertanto deve essere $\sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ oppure $\sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{P'}$. Se fosse $\sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$, sarebbe $\sigma = \mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ per il teorema R1.2.6; dunque necessariamente $\sigma(\mathbf{P}) = \mathbf{P'}$ e, in particolare, $\sigma(\mathbf{P})$ è univocamente determinato.

Questo risultato verrà precisato col teorema R1.3.3.

R1.3 - Simmetrie assiali.

Sia $\boldsymbol{r}$ una retta del piano. Si dice *simmetria assiale di asse* $\boldsymbol{r}$, e si indica con $\sigma_{\boldsymbol{r}}$, l'applicazione $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ così definita per ogni $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$:

se $\mathbf{P} \in \boldsymbol{r}$, $\sigma_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{P}) := \mathbf{P}$; se $\mathbf{P} \notin \boldsymbol{r}$, sia $\boldsymbol{s}$ la retta per **P** ortogonale a $\boldsymbol{r}$ e sia **S** il punto in cui $\boldsymbol{s}$ incontra $\boldsymbol{r}$: $\sigma_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{P})$ è l'unico punto di $\boldsymbol{s}$ distinto da **P** che ha da **S** la stessa distanza di **P**.

Il nome "simmetria assiale" è abbastanza standard ma non è l'unico usato; fra i sinonimi più diffusi ricordiamo: "simmetria ortogonale", "riflessione", "ribaltamento".

Teorema R1.3.1

Ogni simmetria assiale è una isometria.

Dimostrazione – Si consideri un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico che abbia come asse delle ordinate l'asse della simmetria data: l'asserto è di immediata verifica.

Teorema R1.3.2

Ogni simmetria assiale lascia fissi tutti e soli i punti dell'asse e scambia fra loro i due semipiani individuati dall'asse.

Dimostrazione – Dalla definizione segue subito che una simmetria assiale lascia fissi tutti i punti dell'asse e scambia fra loro i due semipiani individuati dall'asse. Una simmetria assiale non può lasciare fisso alcun punto esterno all'asse perché è un'isometria (teorema R1.3.1) e se avesse tre punti fissi non allineati sarebbe l'identità (teorema R1.2.6).

Teorema R1.3.3

Comunque presi due punti distinti **A** e **B**, esiste esattamente una isometria non identica che lascia fissi sia **A** che **B**: la simmetria assiale che ha per asse la retta **AB**.

Dimostrazione – Per definizione, la simmetria assiale che ha per asse la retta **AB** lascia fissi sia **A** che **B**; per il teorema R1.2.9, non può esistere un'altra isometria che lascia fissi **A** e **B**.

Teorema R1.3.4

Ogni simmetria assiale coincide con la propria inversa (e, quindi, composta con se stessa dà l'identità).

Dimostrazione – Ovvio, per come è definita una simmetria assiale.

Teorema R1.3.5

Si riferisca il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico **Oxy**. Sia ***r*** la retta di equazione y $= p$x. La simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{r}}$ di asse ***r*** ha equazioni

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(1-p^2)x+2py}{1+p^2} \\ y' = \dfrac{y(p^2-1)+2px}{1+p^2} \end{cases}$$

Dimostrazione – L'enunciato afferma in sostanza che $\sigma_{\boldsymbol{r}}$ porta il punto $\mathbf{P} \equiv (x_0, y_0)$ nel punto $\sigma_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{P})$ di coordinate $\left(\frac{(1-p^2)x_0+2py_0}{1+p^2}, \frac{2px_0+(p^2-1)y_0}{1+p^2}\right)$. Si tratta di un facile esercizio di geometria analitica, che il lettore è invitato a svolgere.

Teorema R1.3.6

Si riferisca il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico **Oxy**.
La simmetria assiale che ha per asse la retta y $= q$ ha equazioni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2q - y \end{cases}$$

e la simmetria assiale che ha per asse la retta x $= q$ ha equazioni

$$\begin{cases} x' = 2q - x \\ y' = y \end{cases}$$

Dimostrazione – Si tratta di un esercizio di geometria analitica ancora più facile della dimostrazione del teorema R1.3.5.

Esercizio R1.3.7

Si riferisca il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico **Oxy**. Sia ***r*** la retta di equazione

$$a\text{x} + b\text{y} + c = 0.$$

Si dimostri che la simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{r}}$ di asse ***r*** ha equazioni

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(b^2-a^2)x-2aby-2ac}{a^2+b^2} \\ y' = \dfrac{-2abx+(a^2-b^2)y-2bc}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Osservazione – È ancora un esercizio di geometria analitica, privo di difficoltà concettuali ma un po' complesso nei calcoli. La retta per $\mathbf{P_0} \equiv (x_0, y_0)$ ortogonale a $\boldsymbol{r}$ ha equazione

$$b\mathrm{x} - a\mathrm{y} + ay_0 - bx_0 = 0$$

e incontra $\boldsymbol{r}$ nel punto $\mathbf{K} \equiv \left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}, \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2+b^2}\right)$. Il punto $\sigma_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{P_0})$ può essere calcolato come l'unico punto di $\boldsymbol{r}$ distinto di $\mathbf{P_0}$ che ha da $\mathbf{K}$ la stessa distanza di $\mathbf{P_0}$.

Più avanti (teorema R2.4.4) vedremo che $\sigma_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{P_0})$ è il simmetrico di $\mathbf{P_0}$ nella simmetria centrale di centro $\mathbf{K}$ (che verrà definita in R2.4); l'asserto risulterà così facile conseguenza del teorema R2.4.5.

Teorema R1.3.8

Siano $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}$ due rette. Posto $\boldsymbol{r'} := \sigma_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{r})$, si ha che

$$\sigma_{\boldsymbol{r'}} = \sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}.$$

Dimostrazione – Poiché $\sigma_{\boldsymbol{r'}}$ (per il teorema R1.3.1) e $\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ (per i teoremi R1.3.1 e R1.2.2) sono isometrie, per il teorema R1.2.7 basta provare che operano allo stesso modo su tre punti non allineati. È immediato verificare che operano allo stesso modo su tutti i punti di $\boldsymbol{r'}$; ma si controlla facilmente anche che operano allo stesso modo su tutti i punti di $\boldsymbol{a}$: si può ad esempio fissare un SdR cartesiano ortogonale monometrico nel quale $\boldsymbol{a}$ sia l'asse delle ascisse e l'eventuale intersezione di $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{r}$ sia l'origine, ed applicare il teorema R1.3.5 oppure il teorema R1.3.6.

Teorema R1.3.9

Se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sono tre rette che passano per uno stesso punto $\mathbf{O}$, si ha

$$\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}} = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}.$$

Dimostrazione – Per il teorema R1.2.7 è sufficiente verificare che $\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}}$ e $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ operano allo stesso modo su tre punti non allineati. A tale scopo, si consideri un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nel quale $\mathbf{O}$ sia l'origine e $\boldsymbol{c}$ sia l'asse delle ordinate e si applichi il teorema R1.3.5 per calcolare le immagini di $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ mediante $\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}}$ e $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$.

Osservazione R1.3.10

Se le tre rette $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ non passano per uno stesso punto, si ha in generale

$$\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}} \neq \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}.$$

Per un semplice esempio, si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico $\boldsymbol{Oxy}$ e si scelga come retta $\boldsymbol{a}$ l'asse $\boldsymbol{x}$, come retta $\boldsymbol{b}$ l'asse $\boldsymbol{y}$ e come retta $\boldsymbol{c}$ la retta di equazione $\mathrm{x} = 1$. L'origine è portata da $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ nel punto di coordinate $(2, 0)$, ed è invece portata da $\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}}$ nel punto di coordinate $(-2, 0)$.

R1.4 - Vettori liberi.

Richiamiamo in questa sezione le nozioni di *vettore applicato* e di *vettore libero*. Quest'ultimo concetto risulterà prezioso nella sezione R1.5.

Siano **A**, **B** punti dello spazio. La coppia ordinata (**A**, **B**) si dice anche *vettore applicato* e, quando si usa questo termine, si indica col simbolo $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$. Si noti che può essere $\mathbf{A} = \mathbf{B}$; in questo caso, il vettore applicato si dice *nullo*.

Si dice *modulo* del vettore applicato non nullo $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, e si indica con $\| \overrightarrow{\mathbf{AB}} \|$, il numero reale positivo $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ che esprime la distanza fra **A** e **B**.

Si dice *direzione* del vettore applicato non nullo $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ la direzione della retta **AB** (cfr. [1], 6.3.3).

Siano $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ vettori applicati non nulli aventi la stessa direzione; si dice che $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ *hanno lo stesso verso* se individuano lo stesso verso sulle rette **AB** e **CD** (cfr. [1], sez. 12.1).

Al vettore applicato nullo $\overrightarrow{\mathbf{AA}}$ si assegna modulo 0 (in accordo col fatto che $d(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0$ per ogni punto **A**) ma non si assegna una direzione né se ne confronta il verso con quello di altri vettori applicati.

Due vettori applicati si dicono *equipollenti* se

– sono entrambi nulli

oppure

– sono entrambi non nulli, ed hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso.

Osservazione R1.4.1

La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza nell'insieme dei vettori applicati.

Dimostrazione – Si tratta di una verifica pressoché immediata.

Teorema R1.4.2

Siano **A**, **B**, **C**, **D** punti dello spazio. Condizione necessaria e sufficiente affinché il vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ sia equipollente al vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ è che il punto medio del segmento $\overline{\mathbf{AD}}$ coincida col punto medio del segmento $\overline{\mathbf{BC}}$.

In particolare: se **A**, **B**, **C**, **D** non sono allineati, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ è equipollente a $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ se e solo se **ABDC** è un parallelogramma.

Dimostrazione – Se i punti **A**, **B**, **C**, **D** appartengono tutti a una stessa retta il teorema è immediato; dunque possiamo supporre che le rette **AB** e **CD** siano distinte. Se $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ è equipollente a $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$, **ABDC** è un parallelogramma perché ha i lati opposti congruenti e paralleli; dunque le sue diagonali si intersecano nel loro punto medio, come si voleva dimostrare. Viceversa, supponiamo che il punto medio **M** del segmento $\overline{\mathbf{AD}}$ sia anche punto medio del segmento $\overline{\mathbf{BC}}$: allora i quattro punti **A**, **B**, **C**, **D** sono complanari, e i triangoli **AMB** e **CMD** sono congruenti per il primo criterio (gli angoli $\mathbf{A\hat{M}B}$ e $\mathbf{C\hat{M}D}$ sono congruenti perché opposti al vertice); ne segue che

(1) le rette **AB** e **CD** sono parallele perché formano con **AD** angoli alterni interni congruenti;

(2) i segmenti $\overline{\mathbf{AB}}$ e $\overline{\mathbf{CD}}$ sono congruenti;

(3) le coppie ordinate $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ inducono lo stesso verso sulle rette **AB** e **CD**, come si verifica proiettando nelle direzione della retta **BC**;

e dunque $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ è equipollente a $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$, come si voleva dimostrare.

Teorema R1.4.3

Comunque scelti i punti **A**, **B**, **C**, esiste uno e un solo punto **D** tale che il vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ è equipollente al vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

Dimostrazione – Supponiamo in primo luogo che i punti **A**, **B**, **C** appartengano a una stessa retta ***r***; allora **D** è uno (e uno solo) dei due punti di ***r*** che hanno distanza da **C** uguale al modulo di $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

Supponiamo invece ora che **A**, **B**, **C** non siano allineati. Sia ***r*** la retta per **C** parallela alla retta **AB**, e sia **P** l'intersezione fra ***r*** e la retta per **B** parallela alla retta **AC**; sia **P'** il punto di ***r*** simmetrico di **P** rispetto a **C**. I vettori applicati $\overrightarrow{\mathbf{CP}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{CP'}}$ hanno entrambi modulo e direzione uguali al modulo e alla direzione di $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, ed hanno inoltre versi opposti: sarà dunque $\mathbf{D} = \mathbf{P}$ oppure $\mathbf{D} = \mathbf{P'}$; si può concludere che $\mathbf{D} = \mathbf{P}$ utilizzando il teorema R1.4.2.

Sia $\mathcal{V}_{\mathrm{A}}$ l'insieme dei vettori applicati. Si dice *vettore libero* una classe di equivalenza di $\mathcal{V}_{\mathrm{A}}$ (cfr. [1], 6.2) rispetto alla relazione di equipollenza (cfr. oss. R1.4.1). Il generico vettore libero si indica usualmente con una lettera sottolineata, ad es.: $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{w}}$, $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$. L'insieme dei vettori liberi si indica con $\mathcal{V}_3$.

Se $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ è un vettore applicato, la classe di equivalenza (rispetto alla relazione di equipollenza) a cui appartiene $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ è dunque un vettore libero $\underline{\mathbf{v}}$; spesso si scrive $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Si dice che $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ è un *rappresentante* di $\underline{\mathbf{v}}$; naturalmente, ogni vettore applicato equipollente ad $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ è ancora un rappresentante di $\underline{\mathbf{v}}$. I vettori applicati nulli costituiscono una classe di equivalenza, che si dice *vettore* (*libero*) *nullo* e si indica con $\underline{\mathbf{0}}$.

Sia $\underline{\mathbf{v}}$ un vettore libero non nullo. Modulo, direzione e verso di un qualunque rappresentante di $\underline{\mathbf{v}}$ si dicono rispettivamente *modulo*, *direzione* e *verso* di $\underline{\mathbf{v}}$ (il modulo di $\underline{\mathbf{v}}$ si indica con $\| \underline{\mathbf{v}} \|$). Al vettore nullo si assegna modulo 0 ma non si assegnano direzione né verso.

Due vettori liberi non nulli si dicono *paralleli* se hanno la stessa direzione; si dicono *ortogonali* (o *perpendicolari*) se hanno direzioni ortogonali ([1]). Si conviene che il vettore nullo sia parallelo e ortogonale ad ogni vettore libero.

Teorema R1.4.4

Comunque scelti il punto **C** e il vettore libero $\underline{\mathbf{v}}$, esiste uno e un solo punto **D** tale che il vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ rappresenta $\underline{\mathbf{v}}$, ossia tale che $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{D} - \mathbf{C}$.

Dimostrazione – Sia $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$; allora il vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ rappresenta $\underline{\mathbf{v}}$. Per il teorema R1.4.3, esiste uno e un solo punto **D** tale che il vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ è equipollente al vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$; ma allora $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ rappresenta $\underline{\mathbf{v}}$, come si voleva.

Siano $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{w}}$ vettori liberi. Scelto un rappresentante $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ per $\underline{\mathbf{v}}$, il teorema R1.4.4 garantisce l'esistenza di un punto **C** tale che il vettore applicato $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ rappresenta $\underline{\mathbf{w}}$. Si pone

$$\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} := \mathbf{C} - \mathbf{A}.$$

Teoremi di geometria piana che supponiamo noti dalla Scuola Secondaria consentono di dimostrare che il vettore libero $\mathbf{C} - \mathbf{A}$ non dipende dalla particolare scelta dei punti **A**, **B**, **C** (fermo restando che $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ rappresenti $\underline{\mathbf{v}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ rappresenti $\underline{\mathbf{w}}$) ma solo dai vettori liberi $\underline{\mathbf{v}}$ e $\underline{\mathbf{w}}$. Si è cioè effettivamente definita un'operazione binaria interna (detta *somma*) nell'insieme $\mathcal{V}_3$ dei vettori liberi ([2]). Si noti che la definizione di somma può essere scritta come

$$(\mathbf{C} - \mathbf{B}) + (\mathbf{B} - \mathbf{A}) := \mathbf{C} - \mathbf{A}.$$

[1] cioè se due rette qualsiasi aventi le loro direzioni sono ortogonali. Per teoremi di geometria elementare che supponiamo noti, il verificarsi o meno di tale condizione non dipende dalle particolari rette scelte.

[2] Una situazione analoga si verifica quando si definiscono le operazioni (di somma, prodotto, ecc.) nell' insieme $\mathbb{Q}$: si ragiona sulle frazioni (che "rappresentano" i numeri razionali, ma non "sono" i numeri razionali) mostrando poi che il risultato ottenuto non dipende dalle particolari frazioni considerate ma solo dai numeri razionali che esse rappresentano.

Ancora da teoremi di geometria studiati nella Scuola Secondaria segue che la somma così definita è associativa e commutativa. È poi ovvio dalla definizione stessa che il vettore nullo è elemento neutro per la somma e che $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \underline{\mathbf{0}}$, cosicché per ogni vettore libero esiste il simmetrico rispetto alla somma (che si dice *opposto* del vettore dato). Si ha così (cfr. [1], 8.1)

Teorema R1.4.5

L'insieme dei vettori liberi è un gruppo commutativo rispetto alla somma.

Siano $\underline{\mathbf{v}}$ un vettore libero e λ un numero reale. Si dice *prodotto di* $\underline{\mathbf{v}}$ *per* λ il vettore libero $\lambda\underline{\mathbf{v}}$ tale che:

– il modulo di $\lambda\underline{\mathbf{v}}$ è $|\lambda| \cdot \| \underline{\mathbf{v}} \|$;

e inoltre, se $\| \lambda\underline{\mathbf{v}} \| \neq 0$:

– la direzione di $\lambda\underline{\mathbf{v}}$ è la direzione di $\underline{\mathbf{v}}$;

– $\lambda\underline{\mathbf{v}}$ ha lo stesso verso di $\underline{\mathbf{v}}$ se $\lambda > 0$, ha lo stesso verso dell'opposto di $\underline{\mathbf{v}}$ se $\lambda < 0$.

Teoremi di geometria che dovrebbero essere conosciuti dalla Scuola Secondaria consentono di dimostrare che $\lambda\underline{\mathbf{v}}$ resta univocamente individuato da queste condizioni e che valgono le seguenti proprietà:

$\lambda \cdot (\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = \lambda\underline{\mathbf{v}} + \lambda\underline{\mathbf{w}} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}_3;$

$(\lambda + \mu) \cdot \underline{\mathbf{v}} = \lambda\underline{\mathbf{v}} + \mu\underline{\mathbf{v}} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\, \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_3;$

$\lambda \cdot (\mu\underline{\mathbf{v}}) = (\lambda\mu)\underline{\mathbf{v}} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall\, \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_3;$

$1\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} \quad \forall\, \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_3.$

Nel seguito rivolgeremo la nostra attenzione al sottoinsieme $\mathcal{V}_2$ di $\mathcal{V}_3$ formato dai vettori liberi paralleli a un piano fissato: $\mathcal{V}_2$ si dice *insieme dei vettori liberi del piano*.

Supponiamo fissato nel piano un SdR cartesiano $\boldsymbol{Oxy}$; siano $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}} \equiv (1, 0)$ e $\mathbf{U}_{\boldsymbol{y}} \equiv (0, 1)$ i punti unità degli assi coordinati (cfr. [1], 12.3). I vettori liberi $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}} - \mathbf{O}$ e $\mathbf{U}_{\boldsymbol{y}} - \mathbf{O}$ si indicano rispettivamente con $\underline{\mathbf{i}}$ e $\underline{\mathbf{j}}$.

Teorema R1.4.6

Per ogni punto del piano $\mathbf{P_0} \equiv (x_0, y_0)$ si ha
$$\mathbf{P_0} - \mathbf{O} = x_0\,\underline{\mathbf{i}} + y_0\,\underline{\mathbf{j}}.$$

Dimostrazione – Per ogni punto $\mathbf{P_0}'$ del piano si ha
$$\mathbf{P_0} - \mathbf{O} = (\mathbf{P_0} - \mathbf{P_0}') + (\mathbf{P_0}' - \mathbf{O})$$
per come si è definita la somma fra vettori liberi. Se $\mathbf{P_0}'$ è il punto di intersezione fra l'asse $\boldsymbol{x}$ e la parallela all'asse $\boldsymbol{y}$ passante per $\mathbf{P_0}$, è chiaro che $\mathbf{P_0}' - \mathbf{O}$ e $\mathbf{P_0} - \mathbf{P_0}'$ sono paralleli rispettivamente a $\underline{\mathbf{i}}$ e $\underline{\mathbf{j}}$; con un po' di attenzione, e ricordando come sono definite le coordinate di $\mathbf{P_0}$ (cfr. [1], 12.2), si verifica infine che è proprio $\mathbf{P_0}' - \mathbf{O} = x_0\underline{\mathbf{i}}$ e $\mathbf{P_0} - \mathbf{P_0}' = y_0\underline{\mathbf{j}}$.

Teorema R1.4.7

Siano $\mathbf{P_1} \equiv (x_1, y_1)$, $\mathbf{P_2} \equiv (x_2, y_2)$ punti del piano. Si ha
$$\mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} = (x_2 - x_1)\,\underline{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\,\underline{\mathbf{j}}.$$

Dimostrazione – Poiché
$$\mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} = (\mathbf{P_2} - \mathbf{O}) - (\mathbf{P_1} - \mathbf{O})$$
(si ricordi la definizione di somma fra vettori liberi), per il teorema R1.4.6 si ha
$$\mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} = (x_2\underline{\mathbf{i}} + y_2\underline{\mathbf{j}}) - (x_1\underline{\mathbf{i}} + y_1\underline{\mathbf{j}}) = (x_2\underline{\mathbf{i}} - x_1\underline{\mathbf{i}}) + (y_2\underline{\mathbf{j}} - y_1\underline{\mathbf{j}}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\,\underline{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\,\underline{\mathbf{j}}$$
ricordando le proprietà del prodotto fra vettori liberi e numeri reali.

R1.5 - Traslazioni.

Si dice *traslazione* la composizione di due simmetrie assiali con gli assi paralleli.

Se gli assi sono distinti, la traslazione si dice *propria*; la direzione ortogonale a tali assi si dice *direzione* della traslazione. Se gli assi coincidono, si ottiene $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ che dunque è per definizione una traslazione; ogni direzione si può assumere come direzione di $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$, coerentemente col fatto che $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ si può ottenere componendo con se stessa qualsiasi simmetria assiale. Due traslazioni, o una traslazione e una retta, si dicono parallele (oppure ortogonali) se le loro direzioni sono parallele (oppure, rispettivamente, ortogonali).

Per i teoremi R1.3.1 e R1.2.2, ogni traslazione è un'isometria.

Per ogni vettore libero del piano $\underline{\mathbf{v}}$, indichiamo con $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ l'applicazione $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ che porta ogni punto $\mathbf{P}$ del piano nel punto $\mathbf{P}'$ per il quale si ha $\mathbf{P}' - \mathbf{P} = \underline{\mathbf{v}}$ (un tale punto $\mathbf{P}'$ esiste ed è unico per il teorema R1.4.4). Proveremo che le traslazioni sono precisamente le applicazioni $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ con $\underline{\mathbf{v}}$ vettore libero del piano.

Teorema R1.5.1

Siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ rette parallele. Sia $\boldsymbol{r}$ una retta ortogonale ad $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e siano **A**, **B** i punti in cui $\boldsymbol{r}$ incontra rispettivamente $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Si ha $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \tau_{2(\mathbf{B}-\mathbf{A})}$.

Dimostrazione – Si consideri un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel quale la retta $\boldsymbol{r}$ sia l'asse delle ascisse e la retta $\boldsymbol{a}$ sia l'asse delle ordinate; la retta $\boldsymbol{b}$ avrà equazione $\mathrm{x} = x_0$ per un opportuno numero reale x_0. Sarà inoltre $\mathbf{A} \equiv (0, 0)$, $\mathbf{B} \equiv (x_0, 0)$ e $\mathbf{B} - \mathbf{A} = x_0 \underline{\mathbf{i}}$.

Per un punto $\mathbf{P} \equiv (\alpha, \beta)$ si ha $\sigma_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{P}) \equiv (-\alpha, \beta)$ e

$$\mathbf{P'} \coloneqq \sigma_{\boldsymbol{b}}(\sigma_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{P_0})) \equiv (2x_0 - (-\alpha), \beta) = (2x_0 + \alpha, \beta)$$

cosicché $\mathbf{P'} - \mathbf{P} = 2x_0 \underline{\mathbf{i}} = 2(\mathbf{B} - \mathbf{A})$.

Teorema R1.5.2

Sia $\underline{\mathbf{v}}$ un vettore libero del piano. Siano **A**, **B** due punti qualsiasi del piano tali che $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{v}}$, e siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ le rette passanti rispettivamente per **A** e **B** ortogonali a $\underline{\mathbf{v}}$. Allora

$$\tau_{\underline{\mathbf{v}}} = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}.$$

In particolare, $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ è una traslazione che ha la stessa direzione di $\underline{\mathbf{v}}$.

Dimostrazione – Detta $\boldsymbol{r}$ la retta **AB**, per costruzione $\boldsymbol{r}$ è ortogonale sia ad $\boldsymbol{a}$ che a $\boldsymbol{b}$ e le incontra rispettivamente in **A** e in **B**. L'asserto segue dunque immediatamente dal teorema R1.5.1.

Teorema R1.5.3

Ogni traslazione si può ottenere in infiniti modi come composizione di due simmetrie assiali; e l'asse della prima simmetria assiale (oppure l'asse della seconda simmetria assiale) può essere arbitrariamente scelto nel fascio improprio delle rette ortogonali alla traslazione.

Dimostrazione – Per il teorema R1.5.1, ogni traslazione è della forma $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ con $\underline{\mathbf{v}}$ opportuno vettore libero del piano avente la stessa direzione. Sia $\boldsymbol{a}$ una retta ortogonale a $\underline{\mathbf{v}}$, e sia **A** un punto di $\boldsymbol{a}$. Per il teorema R1.4.4, esiste un punto **B** tale che $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{v}}$; detta $\boldsymbol{b}$ la retta per **B** parallela ad $\boldsymbol{a}$, per il teorema R1.5.1 è

$$\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \tau_{\underline{\mathbf{v}}}.$$

Se invece si sceglie **B** in modo che sia $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{v}}$, detta ancora $\boldsymbol{b}$ la retta per **B** parallela ad $\boldsymbol{a}$, sempre per il teorema R1.5.1 si ha

$$\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} = \tau_{\underline{\mathbf{v}}}.$$

Teorema R1.5.4

Una traslazione propria non ha punti fissi.

Dimostrazione – Sia τ una traslazione; supponiamo che τ abbia un punto fisso **P** e proviamo che $\tau = \mathbf{id}_{\mathcal{P}}$.

Per il teorema R1.5.3, possiamo supporre che sia $\tau = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ con $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ rette parallele e con la retta $\boldsymbol{a}$ passante per **P**. Allora $\mathbf{P} = \tau(\mathbf{P}) = \sigma_{\boldsymbol{b}}(\sigma_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{P})) = \sigma_{\boldsymbol{b}}(\mathbf{P})$, cioè **P** è punto fisso per $\sigma_{\boldsymbol{b}}$. Ricordando il teorema R1.3.2, deve essere $\mathbf{P} \in \boldsymbol{b}$. Ma allora le rette parallele $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, avendo il punto **P** in comune, coincidono; e dunque $\tau = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ (si ricordi il teorema R1.3.4).

Teorema R1.5.5

La composizione di due traslazioni è una traslazione.

Dimostrazione – Per il teorema R1.5.1, ogni traslazione è della forma $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ con $\underline{\mathbf{v}}$ opportuno vettore libero del piano avente la stessa direzione; ed è immediato verificare che

$$\tau_{\underline{\mathbf{v}}} \circ \tau_{\underline{\mathbf{w}}} = \tau_{(\underline{\mathbf{w}}+\underline{\mathbf{v}})}$$

qualunque siano i vettori liberi $\underline{\mathbf{v}}$ e $\underline{\mathbf{w}}$.

Esercizio [*] R1.5.6

Siano: $\mathcal{I}$ l'insieme delle isometrie, $\mathcal{T}$ l'insieme delle traslazioni e $\mathcal{V}_2$ l'insieme dei vettori liberi del piano. Si precisi quanto si è visto nella dimostrazione del teorema R1.5.5, provando che

– $(\mathcal{T}, \circ)$ è un sottogruppo di $(\mathcal{I}, \circ)$;

– l'applicazione che al vettore libero $\underline{\mathbf{v}}$ associa $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ è un isomorfismo tra i gruppi $(\mathcal{V}_2, +)$ e $(\mathcal{T}, \circ)$.

Si ricordino le definizioni di 8.2 e 8.3 in [1].

Teorema R1.5.7

Si riferisca il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico $\boldsymbol{Oxy}$, e sia τ una traslazione. Se τ porta l'origine nel punto di coordinate (α, β), τ ha equazioni

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$$

Dimostrazione – Per il teorema R1.5.1, ogni traslazione è della forma $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ con $\underline{\mathbf{v}}$ vettore libero del piano tale che $\underline{\mathbf{v}} = \tau(\mathbf{P}) - \mathbf{P}$ per ogni punto **P** del piano (e, in particolare, $\underline{\mathbf{v}} = \tau(\mathbf{O}) - \mathbf{O}$); dunque, nel nostro caso è $\underline{\mathbf{v}} = \alpha\,\underline{\mathbf{i}} + \beta\,\underline{\mathbf{j}}$ (cfr. teorema R1.4.6) e l'asserto segue dal teorema R1.4.7.

R1.6 - Rotazioni.

Si dice *rotazione* la composizione di due simmetrie assiali con gli assi incidenti.

Se gli assi sono distinti, la rotazione si dice *propria*; l'unico punto comune a tali assi si dice *centro* della rotazione. Se gli assi coincidono, si ottiene $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ che dunque è per definizione una rotazione; ogni punto si può assumere come centro di $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$, coerentemente col fatto che $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ si può ottenere componendo con se stessa qualsiasi simmetria assiale.

Teorema R1.6.1

Sia **C** un punto del piano. Ogni rotazione di centro **C** si può ottenere in infiniti modi come composizione di due simmetrie assiali; e l'asse della prima simmetria assiale (oppure l'asse della seconda simmetria assiale) può essere arbitrariamente scelto nel fascio delle rette passanti per **C**.

Dimostrazione – Sia ϱ una rotazione di centro **C**. Vogliamo provare che per ogni retta $\boldsymbol{a}_0$ passante per **C** si possono trovare: una retta $\boldsymbol{b}_0$ tale che $\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}_0}$; e una retta $\boldsymbol{b}_1$ tale che $\varrho = \sigma_{\boldsymbol{a}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}_1}$.

Sarà, per definizione, $\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ rette passanti per **C**. Sia dunque $\boldsymbol{a}_0$ una retta passante per **C**, sia $\boldsymbol{r}$ la bisettrice dell'angolo individuato da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{a}_0$, e poniamo $\boldsymbol{b}_0 := (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{b})$. Vogliamo provare che $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}_0}$.

Per fissare le idee, poniamo $\boldsymbol{b}' := \sigma_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})$, cosicché $\boldsymbol{b}_0 = (\sigma_{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{b}')$. Per il teorema R1.3.8,

$$\sigma_{\boldsymbol{b}_0} = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}'} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}} \quad \text{e} \quad \sigma_{\boldsymbol{b}'} = \sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}.$$

Ancora per il teorema R1.3.8, essendo $\sigma_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_0$, si ha che

$$\sigma_{\boldsymbol{a}_0} = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}.$$

Dunque

$$\sigma_{\boldsymbol{b}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}_0} = \left(\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}\right) \circ (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}) = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}.$$

Poiché le tre rette $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ passano tutte per il punto **C**, possiamo applicare il teorema R1.3.9 e concludere che

$$\sigma_{\boldsymbol{b}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}_0} = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}) = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}.$$

Se invece $\boldsymbol{r}$ è la bisettrice dell'angolo individuato da $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a}_0$, posto $\boldsymbol{b}_0 := (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}})(\boldsymbol{a})$, si vede allo stesso modo che

$$\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{a}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}_0}.$$

Osservazione R1.6.2

Col teorema R2.4.2 potremo precisare l'enunciato del teorema R1.6.1 utilizzando una caratterizzazione delle rotazioni mediante la nozione di "angolo orientato libero".

Teorema R1.6.3

Una rotazione propria ha il centro come unico punto fisso.

Dimostrazione – Sia ϱ una rotazione di centro **C**. Sarà, per definizione, $\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ rette passanti per **C**. Dunque

$$\varrho(\mathbf{C}) = (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})(\mathbf{C}) = \sigma_{\boldsymbol{b}}(\sigma_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{C})) = \sigma_{\boldsymbol{b}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$$

cioè **C** è punto fisso per ϱ. Supponiamo che ϱ abbia un altro punto fisso **P**, distinto da **C**, e proviamo che ϱ è l'identità.

Per il teorema R1.6.1, possiamo supporre che sia $\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}_0}$ dove $\boldsymbol{a}_0$ è la retta **CP** e $\boldsymbol{b}_0$ è una retta opportuna; ne segue che

$$\mathbf{P} = \varrho(\mathbf{P}) = \sigma_{\boldsymbol{b}_0}(\sigma_{\boldsymbol{a}_0}(\mathbf{P})) = \sigma_{\boldsymbol{b}_0}(\mathbf{P})$$

e dunque $\mathbf{P} \in \boldsymbol{b}_0$ (teorema R1.3.2). Ma allora le rette $\boldsymbol{a}_0$ e $\boldsymbol{b}_0$ hanno in comune i due punti distinti **C** e **P**, e dunque coincidono; pertanto

$$\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}_0} = \sigma_{\boldsymbol{a}_0} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}_0} = \mathbf{id}_{\mathcal{P}}$$

come si voleva.

Teorema R1.6.4

La composizione di due rotazioni che hanno lo stesso centro **C** è una rotazione di centro **C** anch'essa. La composizione di due rotazioni che hanno centri distinti è una rotazione oppure una traslazione.

Dimostrazione – Siano ϱ_1 e ϱ_2 due rotazioni che hanno lo stesso centro **C**. Scelta una qualsiasi retta $\boldsymbol{b}$ passante per **C**, per il teorema R1.6.1, possiamo supporre che sia

$\varrho_1 = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ e $\varrho_2 = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}$ con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ rette opportune passanti per **C**.

Allora

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$$

con le rette $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ passanti per **C**; dunque $\varrho_2 \circ \varrho_1$ è una rotazione di centro **C**.

Siano ora ϱ_1 e ϱ_2 due rotazioni che hanno centri distinti $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ rispettivamente. Detta $\boldsymbol{b}$ la retta individuata da $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$, per il teorema R1.6.1 possiamo supporre che sia

$\varrho_1 = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ e $\varrho_2 = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}$ con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ rette opportune.

Allora

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$$

ma non possiamo stabilire se le rette $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ sono incidenti oppure parallele; dunque $\varrho_2 \circ \varrho_1$ è una rotazione oppure una traslazione.

Teorema R1.6.5

La composizione di una rotazione propria ed una traslazione propria (in qualsiasi ordine) è una rotazione propria.

Dimostrazione – Siano ϱ una rotazione di centro **C** e τ una traslazione. Detta $\boldsymbol{b}$ la retta passante per **C** ortogonale a τ, per i teoremi R1.5.3 e R1.6.1 possiamo supporre che sia

$\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ e $\tau = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}$ con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ rette opportune.

Allora

$$\tau \circ \varrho = (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$$

e certamente le rette $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$ sono incidenti e distinte (se fossero parallele, sarebbero parallele anche a $\boldsymbol{b}$ e ϱ sarebbe una traslazione); dunque $\tau \circ \varrho$ è una rotazione propria. Possiamo però anche supporre, sempre per i teoremi R1.5.3 e R1.6.1, che sia

$\varrho = \sigma_{\boldsymbol{c'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}$ e $\tau = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}}$ con $\boldsymbol{a'}$ e $\boldsymbol{c'}$ rette opportune.

Allora

$$\varrho \circ \tau = (\sigma_{\boldsymbol{c'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}}) = \sigma_{\boldsymbol{c'}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}} = \sigma_{\boldsymbol{c'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}}$$

e anche le rette $\boldsymbol{a'}$ e $\boldsymbol{c'}$ devono essere incidenti e distinte; dunque anche $\varrho \circ \tau$ è una rotazione propria.

Teorema R1.6.6

Sia **P** un punto del piano. Ogni rotazione si può esprimere come composizione di una rotazione di centro **P** e di una traslazione.

Dimostrazione – Sia ϱ una rotazione, sia **C** il suo centro e sia $\boldsymbol{a}$ la retta **CP**. Per il teorema R1.6.1, esiste una retta $\boldsymbol{b}$ passante per **C** tale che $\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$.

Sia $\boldsymbol{b'}$ la retta per **P** parallela a $\boldsymbol{b}$; allora, ricordando il teorema R1.3.4, si ha che

$$\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \mathbf{id}_{\mathcal{P}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b'}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b'}}) \circ (\sigma_{\boldsymbol{b'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})$$

e, per definizione, $\sigma_{\boldsymbol{b'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ è una rotazione di centro **P** e $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b'}}$ è una traslazione.

Osservazione R1.6.7

Si riferisca il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico $\mathbf{O}\boldsymbol{xy}$; per il teorema R1.6.6, ogni rotazione si può esprimere come composizione di una rotazione di centro **O** e di una opportuna traslazione. Per scrivere le equazioni di una rotazione di centro **O** è necessario utilizzare sia la caratterizzazione delle rotazioni mediante la nozione di “angolo orientato libero” (che verrà data nella sez. R2.4) sia le funzioni **sin** e **cos** (che saranno introdotte nella sez. R3.2). Torneremo perciò su questo argomento nella sez. R3.5.

R1.7 - Antitraslazioni.

Si dice *antitraslazione* (o *glissosimmetria*) la composizione di una traslazione (propria) con una simmetria assiale di asse non ortogonale alla traslazione. Dunque, per ogni antitraslazione ϑ esistono tre rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{r}$ tali che

$$\vartheta = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})$$

e le rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono distinte, parallele fra loro e non parallele a $\boldsymbol{r}$.

Teorema R1.7.1

La composizione di tre simmetrie assiali è:

– una simmetria assiale, se i tre assi hanno un punto in comune oppure sono tutti paralleli fra loro;

– una antitraslazione, altrimenti.

Dimostrazione – Siano $\sigma_{\boldsymbol{a}}$, $\sigma_{\boldsymbol{b}}$ e $\sigma_{\boldsymbol{c}}$ le simmetrie assiali date, di assi rispettivamente $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

Supponiamo in primo luogo che le rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ siano parallele; allora $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ è una traslazione e quindi per il teorema R1.5.3 si può esprimere nella forma $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}$ con $\boldsymbol{a}'$ opportunamente scelta nel fascio improprio delle rette parallele ad $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Dunque in questo primo caso $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}) = (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'} = \sigma_{\boldsymbol{a}'}$ come si voleva.

Supponiamo poi che le rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ abbiano in comune un punto **C**; allora $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ è una rotazione di centro **C** e quindi per il teorema R1.6.1 si può esprimere nella forma $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}$ con $\boldsymbol{a}'$ opportunamente scelta. Dunque

$$\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}) = (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'} = \sigma_{\boldsymbol{a}'} \quad \text{come si voleva.}$$

Supponiamo infine che le rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ non siano tutte parallele fra loro e non abbiano alcun punto in comune. Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono parallele, $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})$ è una antitraslazione per definizione. Se invece $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ non sono parallele, $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ è una rotazione; per il teorema R1.6.1, si può scrivere $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}'} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}$ con $\boldsymbol{b}'$ non parallela a $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{a}'$ opportunamente scelta; ma allora $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}'}$ è una rotazione: ancora per il teorema R1.6.1, si può scrivere

$$\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}'} = \sigma_{\boldsymbol{c}'} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}''} \quad \text{con } \boldsymbol{c}' \text{ opportunamente scelta e } \boldsymbol{b}'' \text{ parallela ad } \boldsymbol{a}'. \text{ Dunque}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}'} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}) = (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}'}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'} = (\sigma_{\boldsymbol{c}'} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}''}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'} = \sigma_{\boldsymbol{c}'} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}''} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'})$$

è la composizione della traslazione $\sigma_{\boldsymbol{b}''} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}$ con la simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{c}'}$.

Resta da provare che $\sigma_{\boldsymbol{b}''} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}$ non è l'identità. In effetti, se fosse $\sigma_{\boldsymbol{b}''} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'} = \mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ si avrebbe $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{c}'}$ da cui $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}'}$.

Stiamo però considerando il caso in cui le rette $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ hanno in comune esattamente un punto **C**; dunque $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ è una rotazione propria di centro **C**. Allora anche $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{c}'}$ sarebbe una rotazione propria di centro **C**, e quindi in particolare la retta $\boldsymbol{c}$ passerebbe per **C**: assurdo, perché abbiamo supposto che le tre rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ non abbiano alcun punto in comune.

Dunque $\sigma_{\boldsymbol{b}''} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}'}$ non è l'identità e si è così completamente dimostrato che $\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})$ è un'antitraslazione.

Teorema R1.7.2

Una antitraslazione non ha punti fissi.

Dimostrazione – Sia ϑ un'antitraslazione, e supponiamo per assurdo che esista un punto **P** fisso per ϑ.

Per definizione, ϑ è composizione di una traslazione τ con una simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{r}}$ il cui asse $\boldsymbol{r}$ non è ortogonale a τ; per il teorema R1.5.3, si può supporre che sia $\tau = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ con la retta $\boldsymbol{a}$ passante per **P**. Allora $\mathbf{P} = \vartheta(\mathbf{P}) = (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}})(\sigma_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{P})) = (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}})(\mathbf{P})$ ossia **P** è punto fisso per la rotazione $\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}$.

Per il teorema R1.6.3, **P** è il centro della rotazione $\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}$ e dunque appartiene a $\boldsymbol{b}$. Ma ciò è assurdo, perché per costruzione **P** appartiene ad $\boldsymbol{a}$, e le rette $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono per ipotesi parallele.

Teorema R1.7.3

Sia **C** un punto fissato del piano. Ogni antitraslazione si può esprimere come composizione di una opportuna rotazione (propria) di centro **C** e di una opportuna simmetria assiale il cui asse non passa per **C**.

Dimostrazione – Sia ϑ l'antitraslazione data; per definizione, esistono tre rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{r}$ tali che
$$\vartheta = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})$$
e le rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono distinte, parallele fra loro e non parallele a $\boldsymbol{r}$. Per il teorema R1.5.3, detta $\boldsymbol{a'}$ la retta parallela ad $\boldsymbol{a}$ passante per **C**, esiste una retta $\boldsymbol{b'}$ parallela a $\boldsymbol{b}$ tale che
$$\sigma_{\boldsymbol{b'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}} = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}.$$
Poiché $\boldsymbol{r}$ non è parallela a $\boldsymbol{b}$, non è nemmeno parallela a $\boldsymbol{b'}$. Sia **P** il punto comune alle rette $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{b'}$, e sia $\boldsymbol{b''}$ la retta **PC**; per il teorema R1.6.1, esiste una retta $\boldsymbol{r'}$ tale che
$$\sigma_{\boldsymbol{r'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b''}} = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b'}}.$$
Le rette $\boldsymbol{a'}$ e $\boldsymbol{b''}$ hanno in comune il punto **C**; inoltre,
$$\vartheta = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}}) = (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b'}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}} = (\sigma_{\boldsymbol{r'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b''}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}} = \sigma_{\boldsymbol{r'}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b''}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}}).$$

Abbiamo così espresso ϑ come composizione della rotazione $\sigma_{\boldsymbol{b''}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}}$ di centro **C** e della simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{r'}}$. Si noti che $\boldsymbol{r'}$ non passa per **C**: in tal caso infatti, per il teorema R1.7.1, $\sigma_{\boldsymbol{r'}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b''}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}})$ (cioè ϑ) sarebbe una simmetria assiale e non un'antitraslazione.

Esercizio [*] R1.7.4

Prendendo esempio dalla dimostrazione del teorema R1.7.3, si provi che:

– Fissato un punto **C** del piano, ogni antitraslazione si può esprimere come composizione di una opportuna simmetria assiale il cui asse non passa per **C** e di una opportuna rotazione (propria) di centro **C**.

– Ogni antitraslazione si può esprimere come composizione di una opportuna simmetria assiale e di una opportuna traslazione (propria) non ortogonale all'asse.

Teorema R1.7.5

Sia $\boldsymbol{r}$ una retta fissata nel piano. Ogni simmetria assiale e ogni antitraslazione si può esprimere come composizione della simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{r}}$ di asse $\boldsymbol{r}$ e di una opportuna rotazione o traslazione.

Dimostrazione – Sia $\boldsymbol{a}$ una retta, e sia $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ la simmetria assiale di asse $\boldsymbol{a}$. Posto $\boldsymbol{a'} := \sigma_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$, per il teorema R1.3.8 si ha che $\sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}$ e dunque $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ è composizione di $\sigma_{\boldsymbol{r}}$ e della rotazione (o traslazione) $\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a'}}$.

Sia poi ϑ un'antitraslazione; per definizione, esistono tre rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ tali che $\vartheta = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})$. Si ha

$$\vartheta = \vartheta \circ \mathbf{id}_{\mathcal{P}} = \vartheta \circ (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}) = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) \circ (\sigma_{\boldsymbol{r}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}) = (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}$$

e $(\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}})$ è una rotazione (oppure una traslazione) per i teoremi R1.5.5, R1.6.4 e R1.6.5.

Osservazione R1.7.6

Si fissino una retta $\boldsymbol{r}$ e un punto **P**. Per i teoremi R1.7.5 e R1.6.6, ogni antitraslazione si può esprimere come composizione della simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{r}}$ di asse $\boldsymbol{r}$, di una opportuna rotazione (eventualmente $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$) di centro **P** e di un'opportuna traslazione. In particolare, fissato un SdR cartesiano ortogonale monometrico **O*xy***, ogni antitraslazione si può esprimere come composizione della simmetria assiale che ha per asse l'asse $\boldsymbol{x}$, di un'opportuna rotazione che ha per centro l'origine e di un'opportuna traslazione. Come preannunciato nell'oss. R1.6.7, torneremo su questo argomento nella sez. R3.5.

R1.8 - Il teorema di struttura delle isometrie.

Teorema R1.8.1

Se una isometria ha tre punti fissi non allineati, è l'identità. Se una isometria non identica ha due punti fissi distinti **A**, **B**, è la simmetria assiale che ha per asse la retta **AB**. Se una isometria ha esattamente un punto fisso **C**, è una rotazione di centro **C**. Se una isometria non ha punti fissi, è una traslazione oppure un'antitraslazione.
In particolare, ogni isometria si può ottenere come composizione di al più tre simmetrie assiali.

Dimostrazione – La prima affermazione è stata provata col teorema R1.2.6; la seconda col teorema R1.3.3.

Sia σ un'isometria che ha un solo punto fisso **C**. Sia **P** un punto del piano distinto da **C**, sia $\mathbf{P'} := \sigma(\mathbf{P})$ e sia $\boldsymbol{a}$ l'asse del segmento $\overline{\mathbf{PP'}}$.

La simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ porta **P** in **P'** e porta **P'** in **P**; inoltre **C**, essendo equidistante da **P** e **P'**, appartiene ad $\boldsymbol{a}$, e quindi $\sigma_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. L'isometria $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ muta dunque in sé sia **C** che **P'**; detta $\boldsymbol{b}$ la retta individuata da **C** e **P'**, deve essere $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ oppure $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}}$.

La prima ipotesi va esclusa, perché ne seguirebbe che

$$\sigma_{\boldsymbol{a}} = \mathbf{id}_{\mathcal{P}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = (\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma$$

assurdo perché per ipotesi σ ha un solo punto fisso mentre $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ muta in sé ogni punto della retta $\boldsymbol{a}$. Dunque $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}}$ da cui infine

$$\sigma = \sigma \circ \mathbf{id}_{\mathcal{P}} = \sigma \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = (\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$$

cioé σ è una rotazione di centro **C**.

Sia infine σ un'isometria senza punti fissi. Scelto un punto **P** del piano, sia $\mathbf{P'} := \sigma(\mathbf{P})$ e sia $\boldsymbol{a}$ l'asse del segmento $\overline{\mathbf{PP'}}$. La simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ porta **P** in **P'** e porta **P'** in **P**; perciò l'isometria $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ muta in sé **P'** e dunque ha almeno un punto fisso.

Se $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ avesse tre punti fissi non allineati sarebbe l'identità e dunque

$$\sigma_{\boldsymbol{a}} = \mathbf{id}_{\mathcal{P}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = (\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = \sigma \circ \mathbf{id}_{\mathcal{P}} = \sigma$$

assurdo, perché per ipotesi σ non ha punti fissi mentre $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ muta in sé ogni punto della retta $\boldsymbol{a}$.

Se $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ ha due punti fissi distinti che individuano una retta $\boldsymbol{b}$, è $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}}$ da cui

$$\sigma = \sigma \circ \mathbf{id}_{\mathcal{P}} = \sigma \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = (\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}.$$

In questo caso, pertanto, σ è una rotazione oppure una traslazione; ma non può essere una rotazione, poiché per ipotesi non ha punti fissi.

Resta da considerare il caso in cui $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ ha esattamente un punto fisso **C**. Allora, per quanto già dimostrato, $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ è una rotazione di centro **C**; dunque esistono due rette $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ passanti per **C** tali che $\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}$

da cui $\sigma = \sigma \circ \mathbf{id}_{\mathcal{P}} = \sigma \circ (\sigma_{\boldsymbol{a}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) = (\sigma \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = (\sigma_{\boldsymbol{c}} \circ \sigma_{\boldsymbol{b}}) \circ \sigma_{\boldsymbol{a}} = \sigma_{\boldsymbol{c}} \circ (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}})$.

Per il teorema R1.7.1, σ è una simmetria assiale oppure un'antitraslazione; ma non può essere una simmetria assiale, poiché per ipotesi non ha punti fissi.

R1.9 - Congruenza. Congruenza diretta.

Per il teorema R1.8.1, le isometrie si possono dividere in due classi. Si dicono *isometrie pari* (oppure *isometrie dirette*) le isometrie che si ottengono componendo un numero pari di simmetrie assiali, cioè (tenendo conto anche dei teoremi R1.5.5, R1.6.4 e R1.6.5): l'identità, le traslazioni e le rotazioni. Si dicono *isometrie dispari* (oppure *isometrie inverse*) le isometrie che si ottengono componendo un numero dispari di simmetrie assiali, cioè (tenendo conto anche del teorema R1.7.1): le simmetrie assiali e le antitraslazioni.

Osservazione R1.9.1

La composizione di isometrie pari è ancora una isometria pari; l'inversa di una isometria pari è una isometria pari. Indichiamo con $\mathcal{I}$ l'insieme delle isometrie e con $\mathcal{I}_2$ l'insieme delle isometrie pari: $(\mathcal{I}_2, \circ)$ è un sottogruppo di $(\mathcal{I}, \circ)$.

Due insiemi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ di punti del piano si dicono *congruenti*, e si scrive $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, se esiste una isometria che trasforma $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$; si dicono *direttamente congruenti* se esiste una isometria pari che trasforma $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono congruenti, si dice anche che “coincidono *a meno di* isometrie”; se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono direttamente congruenti, si dice anche che “coincidono *a meno di* isometrie pari”.

Teorema R1.9.2

La relazione $\equiv$ (di “congruenza”) è una relazione di equivalenza nell’insieme dei sottoinsiemi di $\mathcal{P}$.

Dimostrazione – In effetti:

$\equiv$ è riflessiva: per il teorema R1.2.2, $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$ è un’isometria; dunque per ogni $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{P}$ si ha $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ perché $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$;

$\equiv$ è simmetrica: se $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, esiste $\sigma \in \mathcal{I}$ tale che $\sigma(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$; per il teorema R1.2.2, l’applicazione inversa σ^{-1} di σ è un’isometria; poiché $\sigma^{-1}(\mathbf{B}) = \sigma^{-1}(\sigma(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$ si può concludere che $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}$;

$\equiv$ è transitiva: sia infatti $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$; allora esistono $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{I}$ tali che $\sigma_1(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ e $\sigma_2(\mathbf{B}) = \mathbf{C}$; per il teorema R1.2.2, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ è un’isometria; dunque $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(\mathbf{A}) = \sigma_2(\sigma_1(\mathbf{A})) = \sigma_2(\mathbf{B}) = \mathbf{C}$ e pertanto $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C}$.

Teorema R1.9.3

La relazione di “congruenza diretta” è una relazione di equivalenza nell’insieme dei sottoinsiemi di $\mathcal{P}$.

Dimostrazione – La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema R1.9.2, e si lascia per esercizio.

Considerare anziché una data figura geometrica la classe di congruenza a cui essa appartiene significa studiare le proprietà di quella figura che non dipendono dalla sua particolare collocazione del piano: si identificano cioè con la figura data tutte quelle che si possono ottenere a partire da essa mediante isometrie; si dice talvolta in tal caso che si ragiona “a meno di isometrie” o anche “a meno di congruenze”.

Considerare anziché una data figura geometrica la classe di congruenza diretta a cui essa appartiene significa studiare le proprietà di quella figura che non cambiano se la figura viene sottoposta a rotazioni o traslazioni: si identificano cioè con la figura data tutte quelle che si possono ottenere a partire da essa mediante isometrie pari; si dice talvolta in tal caso che si ragiona “a meno di isometrie pari” o anche “a meno di congruenze dirette”.

Due insiemi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ di punti del piano si dicono *inversamente congruenti* se esiste una isometria dispari che trasforma $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$. Si noti che la relazione di “congruenza inversa” non è una relazione di equivalenza: infatti è simmetrica ma non è né riflessiva né transitiva.

R2.- ANGOLI ORIENTATI E LORO MISURA

R2.1 - Introduzione.

In questo capitolo introduciamo la nozione di “angolo orientato”, che si affianca a (e potrebbe anche sostituire) quella hilbertiana di “angolo” (cfr. [3], cap. 1, sez. 5). Per molte questioni, e certamente per lo studio della Trigonometria piana, sarà di interesse anche il concetto di “angolo (orientato) libero” (attenzione! questo nome non è standard), che presentiamo in R2.3 utilizzando le idee di R1.9.

R2.2 - Angoli orientati e loro misura.

Siano $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ due semirette aventi l’origine in comune. Si dice *angolo orientato* individuato da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ (in questo ordine!) e si indica con $\widehat{rs}$ la coppia ordinata ($\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$). Le semirette $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ si dicono *lati* dell’angolo orientato $\widehat{rs}$; la loro comune origine si dice *vertice* di $\widehat{rs}$. Se $\boldsymbol{r}$ coincide con $\boldsymbol{s}$, l’angolo orientato $\widehat{rr}$ si dice *angolo nullo* (o, anche, *angolo giro*); se $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ sono semirette opposte individuate dal vertice su di una retta, $\widehat{rs}$ si dice *angolo piatto* (naturalmente, anche $\widehat{sr}$ è in questo caso un angolo piatto). Qualunque siano $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$, gli angoli orientati $\widehat{rs}$ e $\widehat{sr}$ si dicono *opposti*; si scrive anche $\widehat{sr} = -\widehat{rs}$.

Siano **A**, **B**, **C** punti distinti del piano. Siano $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ le semirette individuate sulle rette **AB** e **AC** dalle condizioni di avere vertice in **A** e contenere i punti **B** e **C** rispettivamente; l’angolo orientato individuato da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ si indica anche con la scrittura $\mathbf{B\hat{A}C}$.

Sia $\widehat{rs}$ un angolo orientato non nullo né piatto di vertice **V**, e siano **R**, **S** punti distinti da **V** scelti rispettivamente su $\boldsymbol{r}$ e su $\boldsymbol{s}$. Poiché i tre punti **V**, **R** e **S** non sono allineati, si può stabilire (come fissato in [1], 12.1.3) se la terna (**V**, **R**, **S**) è orientata positivamente o negativamente. Si può dimostrare che l’essere la terna (**V**, **R**, **S**) positivamente o negativamente orientata non dipende dalla particolare scelta di **R** e **S** ma solo dalle semirette $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ e dall’ordine in cui si considerano. L’angolo orientato $\widehat{rs}$ si dice *convesso* se la terna (**V**, **R**, **S**) è orientata positivamente, si dice invece *concavo* se la terna (**V**, **R**, **S**) è orientata negativamente. Un angolo orientato $\widehat{rs}$ è convesso se e soltanto se l’angolo opposto $\widehat{sr}$ è concavo; è concavo se e soltanto se l’angolo opposto $\widehat{sr}$ è convesso.

Siano $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ due semirette aventi l’origine in comune. Si conviene di identificare l’angolo (“non orientato”) individuato da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ (nel senso di [3]) con quello tra i due angoli orientati $\widehat{rs}$, $\widehat{sr}$ che è convesso. Pertanto tutte le definizioni, i teoremi ecc. della geometria euclidea nella assiomatizzazione di Hilbert (o in assiomatizzazioni equivalenti) possono essere “automaticamente” tradotti utilizzando la nozione di “angolo orientato” in luogo della nozione di “angolo”.

Nel seguito scriveremo sempre “angolo” anziché “angolo orientato”.

Due angoli $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ e $\widehat{\boldsymbol{uv}}$ si dicono *consecutivi* se $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u}$; se $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ e $\widehat{\boldsymbol{sv}}$ sono angoli consecutivi, l'angolo $\widehat{\boldsymbol{rv}}$ si dice loro *somma* e si scrive $\widehat{\boldsymbol{rv}} = \widehat{\boldsymbol{rs}} + \widehat{\boldsymbol{sv}}$. Due angoli opposti sono consecutivi; la loro somma è un angolo nullo. Due angoli $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ e $\widehat{\boldsymbol{uv}}$ si dicono *adiacenti* se $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u}$ e inoltre $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ sono semirette opposte. Due angoli adiacenti sono consecutivi, e la loro somma è un angolo piatto.

Sia $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ un angolo. Si dice *regione angolare* associata ad $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ l'insieme di punti del piano definito come segue: se $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ è un angolo nullo, la regione angolare ad esso associata è l'insieme vuoto; se $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ è un angolo convesso, la regione angolare ad esso associata è l'intersezione tra il semipiano individuato da $\boldsymbol{r}$ contenente $\boldsymbol{s}$ e il semipiano individuato da $\boldsymbol{s}$ contenente $\boldsymbol{r}$; se $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ è un angolo piatto, la regione angolare ad esso associata è quello tra i due semipiani individuati da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ che possiede la seguente proprietà: per ogni punto $\mathbf{R}$ di $\boldsymbol{r}$, per ogni punto $\mathbf{P}$ interno al semipiano e per ogni punto $\mathbf{S}$ di $\boldsymbol{s}$ la terna ordinata $(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{S})$ è positivamente orientata; se $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ è un angolo concavo, la regione angolare ad esso associata è l'unione tra il semipiano individuato da $\boldsymbol{r}$ non contenente $\boldsymbol{s}$ e il semipiano individuato da $\boldsymbol{s}$ non contenente $\boldsymbol{r}$. Talvolta, con abuso di notazione e di linguaggio, la regione angolare associata ad $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ viene anch'essa indicata con $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ e detta “angolo individuato da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$”.

Siano $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ e $\widehat{\boldsymbol{uv}}$ angoli, e sia σ un'isometria. Se $\sigma(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}$ e $\sigma(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{v}$, si dice che σ *trasforma* (o anche, più confidenzialmente, *porta*) $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ in $\widehat{\boldsymbol{uv}}$. Se esiste una isometria che trasforma $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ in $\widehat{\boldsymbol{uv}}$, si dice che $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ è *congruente* a $\widehat{\boldsymbol{uv}}$. Se esiste una isometria pari che trasforma $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ in $\widehat{\boldsymbol{uv}}$, si dice che $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ è *direttamente congruente* a $\widehat{\boldsymbol{uv}}$. È facile verificare che ciascuna delle due relazioni “essere congruente a” e “essere direttamente congruente a” è una relazione di equivalenza nell'insieme degli angoli.

Angoli opposti sono congruenti, ma non direttamente congruenti (si corrispondono nella simmetria assiale che ha per asse la bisettrice degli angoli). Angoli opposti al vertice sono direttamente congruenti (vedremo nel teorema R2.4.4 che si corrispondono in una rotazione).

Teorema R2.2.1

Per ogni angolo α e per ogni semiretta $\boldsymbol{r}$ esiste esattamente una semiretta $\boldsymbol{s}$ tale che $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ è direttamente congruente ad α.

Dimostrazione – Sarà $\alpha = \widehat{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{s}_1}$ con $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{s}_1$ semirette che hanno in comune l'origine $\mathbf{O_1}$. Sia $\mathbf{O}$ l'origine della semiretta $\boldsymbol{r}$. Posto $\underline{\mathbf{v}} := \frac{1}{2}(\mathbf{O} - \mathbf{O_1})$, la traslazione $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ porta $\mathbf{O_1}$ in $\mathbf{O}$. Sia $\boldsymbol{r}_2 := \tau_{\underline{\mathbf{v}}}(\boldsymbol{r}_1)$, $\boldsymbol{s}_2 := \tau_{\underline{\mathbf{v}}}(\boldsymbol{s}_1)$; allora $\tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ porta α in $\widehat{\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{s}_2}$. Siano ora: $\boldsymbol{b}$ la bisettrice dell'angolo $\widehat{\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}}$; $\sigma_{\boldsymbol{r}_2}$ la simmetria assiale di asse $\boldsymbol{r}_2$; $\sigma_{\boldsymbol{b}}$ la simmetria assiale di asse $\boldsymbol{b}$. La rotazione $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}_2}$ porta $\boldsymbol{r}_2$ in $\boldsymbol{r}$.

Posto $\boldsymbol{s} := (\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}_2})(\boldsymbol{s}_2)$, è immediato che l'isometria pari $(\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}_2}) \circ \tau_{\underline{\mathbf{v}}}$ porta α in $\widehat{\boldsymbol{rs}}$.

Siano α e β angoli. Per il teorema R2.2.1, esiste (ed è unico) un angolo β' consecutivo a α e direttamente congruente a β. Se $\alpha + \beta'$ è un angolo retto, α e β si dicono *angoli complementari*; se $\alpha + \beta'$ è un angolo piatto, α e β si dicono *angoli supplementari*; se $\alpha + \beta'$ è un angolo nullo, α e β si dicono *angoli esplementari*.

Angoli adiacenti sono supplementari (ma angoli supplementari non sono in generale adiacenti); angoli opposti sono esplementari (ma angoli esplementari non sono in generale opposti).

Teorema R2.2.2

Siano α e β angoli consecutivi. Se α' e β' sono angoli consecutivi direttamente congruenti rispettivamente a α e β, la somma di α' e β' è direttamente congruente alla somma di α e β.

Dimostrazione – Siano: $\alpha = \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$, $\beta = \widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}}$, $\alpha' = \widehat{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}'}$ e $\beta = \widehat{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}'}$; **V** il vertice di α (e quindi anche di β), **V'** il vertice di α' (e quindi anche di β'); σ_1 un'isometria pari che porta $\boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{u}'$ e $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{v}'$ (e quindi porta **V** in **V'**); σ_2 un'isometria pari che porta $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{v}'$ e $\boldsymbol{w}$ in $\boldsymbol{w}'$ (e quindi porta **V** in **V'**). Vogliamo provare che $\sigma_1 = \sigma_2$, cosicché σ_1 porta $\boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{u}'$ e $\boldsymbol{w}$ in $\boldsymbol{w}'$ (e quindi porta $\alpha + \beta$ in $\alpha' + \beta'$).

In effetti, $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$ è un'isometria pari che fissa **V** e muta in sé $\boldsymbol{v}$. Sia **P** un punto di $\boldsymbol{v}$ disitinto da $\mathbf{V}: \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$ deve trasformare **P** in un punto di $\boldsymbol{v}$ che abbia da **V** la stessa distanza che ha **P** (perché **V** è un punto fisso per $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$); dunque deve mutare in sé **P**. Allora $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$ ha due punti fissi, e quindi (per il teorema R1.3.3) deve essere l'identità.

Teorema R2.2.3 ("del goniometro")

Sia ϑ un numero reale positivo, e sia $\mathcal{A}$ l'insieme degli angoli. Esiste una e una sola funzione $\mu_\vartheta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tale che

(1) se α è un angolo nullo, $\mu_\vartheta(\alpha) = 0$;

(2) se α è un angolo piatto, $\mu_\vartheta(\alpha) = \vartheta$;

(3) se α, β sono angoli convessi consecutivi, $\mu_\vartheta(\alpha + \beta) = \mu_\vartheta(\alpha) + \mu_\vartheta(\beta)$;

(4) per ogni angolo α non nullo, $\mu_\vartheta(\alpha) + \mu_\vartheta(-\alpha) = 2\vartheta$;

(5) $\mu_\vartheta(\mathcal{A}) = [0, 2\vartheta)$;

(6) comunque presi due angoli α e β, si ha

$\mu_\vartheta(\alpha) = \mu_\vartheta(\beta)$ se e soltanto se α e β sono direttamente congruenti.

Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Sia ϑ un numero reale positivo. La funzione μ_ϑ di cui al teorema R2.2.3 si dice *misura* (*angolare*) o anche *ampiezza*: *in gradi sessagesimali* se $\vartheta = 180$; *in gradi centesimali* se $\vartheta = 200$; *in radianti* se $\vartheta = \pi$. Nel seguito faremo sempre riferimento (come in Matematica è usuale ([3])) alla misura angolare in radianti μ_π.

Poiché la somma di due angoli retti consecutivi è un angolo piatto, dalle (2), (3) e (6) del teorema R2.2.3 segue subito che l'ampiezza di un angolo retto è $\frac{\pi}{2}$. Gli angoli che hanno ampiezza minore di $\frac{\pi}{2}$ si dicono *acuti*, quelli che hanno ampiezza compresa fra $\frac{\pi}{2}$ e π si dicono *ottusi*.

Si prova facilmente che un angolo è convesso se e soltanto se ha ampiezza strettamente compresa tra 0 e π, ed è concavo se e soltanto se ha ampiezza maggiore di π. Sia infatti α un angolo convesso; sia α' un angolo consecutivo ad α e direttamente congruente ad α (un tale angolo esiste certamente per il teorema R2.2.1). Allora per le (3) e (5) del teorema R2.2.3 si ha che

$$2\mu_\pi(\alpha) = \mu_\pi(\alpha) + \mu_\pi(\alpha') = \mu_\pi(\alpha + \alpha') \in [0, 2\pi)$$

e dunque $\mu_\pi(\alpha) < \pi$; inoltre, $\mu_\pi(\alpha) > 0$ per le (1) e (6) del teorema R2.2.3.

Pertanto l'ampiezza di una angolo convesso è strettamente compresa tra 0 e π; dunque (per la (4) del teorema R2.2.3) l'ampiezza di un angolo concavo è maggiore di π.

Ora è immediato concludere la dimostrazione: infatti, se un angolo ha ampiezza strettamente compresa tra 0 e π esso non può essere nullo (per la (1) del teorema R2.2.3) né piatto (per la (2) del teorema R2.2.3) né concavo (per quanto appena visto), dunque è necessariamente convesso; e, analogamente, se un angolo ha ampiezza maggiore di π esso è necessariamente concavo.

R2.3 - Angoli "liberi" e loro misura.

Quasi sempre in Geometria, e certamente sempre nelle questioni di Trigonometria piana, interessa considerare gli angoli (orientati) solo a meno di isometrie pari. Potremmo chiamare *angolo* (*orientato*) *libero* una classe di congruenza diretta di angoli (orientati), con terminologia analoga a quella, ormai tradizionale, che consente di distinguere tra "vettore libero" e "vettore applicato"; ma queso nome non è standard.

In genere, tutte le volte che ciò non dia luogo ad ambiguità, (ossia quasi sempre) si continua a usare soltanto la parola "angolo"; così, ad esempio, se $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ sono due semirette aventi l'origine in comune, si chiama ancora "angolo individuato da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$" la classe di congruenza diretta a cui appartiene $\widehat{\boldsymbol{rs}}$.

Nel seguito scriveremo sempre "angolo" anziché "angolo (orientato) libero".

[3] Il motivo di tale scelta sarà precisato nella sez. R3.3 .

Teorema R2.3.1

Per ogni angolo α e per ogni semiretta $\boldsymbol{r}$ esiste esattamente una semiretta $\boldsymbol{s}$ tale che $\widehat{\boldsymbol{rs}}$ rappresenta α.

Dimostrazione – Si tratta di una riformulazione del teorema R2.2.1.

La (6) del teorema R2.2.3 ci assicura che la nozione di "ampiezza" introdotta nella sez. R2.2 conserva significato anche con la nuova accezione assegnata alla parola "angolo"; e che, inoltre, un angolo resta completamente individuato dalla propria ampiezza.

Per il teorema R2.2.2, ha ora senso considerare la somma di due angoli qualsiasi: anzi, la somma diviene una operazione interna nell'insieme degli angoli rispetto alla quale esso assume la struttura di gruppo commutativo.

Si mantiene tutta la nomenclatura introdotta nella sez. R2.2, riferendo ciascun termine alle classi di congruenza diretta degli angoli interessati.

Siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ due rette orientate (cfr. [1], sez. 12.1).

Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono incidenti in un punto **P**, consideriamo le semirette $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{b}_1$ individuate da **P** su di esse, costituite dai punti che seguono **P** nei versi fissati: l'angolo $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1}$ si dice *angolo formato da* $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono parallele e concordemente orientate, si dice che formano un angolo nullo; se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono parallele e discordemente orientate, si dice che formano un angolo piatto.

Siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ due rette incidenti in un punto **P**; siano $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$ le semirette individuate da **P** su $\boldsymbol{a}$ e siano $\boldsymbol{b}_1$ e $\boldsymbol{b}_2$ le semirette individuate da **P** su $\boldsymbol{b}$.

Poiché le rette $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ non sono orientate, abbiamo a disposizione per associare ad esse (prese nell'ordine dato) i quattro angoli $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1}$, $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2}$, $\widehat{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1}$ e $\widehat{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2}$; ma si noti che $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1}$ e $\widehat{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2}$ sono direttamente congruenti perché opposti al vertice (e così $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2}$ e $\widehat{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1}$) mentre $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1}$ e $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2}$ differiscono per un angolo piatto (avendosi $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2} = \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2}$ con $\widehat{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2}$ piatto) cosicché uno di essi è convesso e l'altro concavo.

Si potrebbe decidere di chiamare *angolo formato da* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ quello fra $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1}$ e $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2}$ che è convesso; spesso però si conserva l'indeterminazione nella scelta fra i due, anche perché (dato che differiscono per un angolo piatto) hanno in comune varie proprietà: ad esempio, $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1} = \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2} + \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2}$ (questa osservazione sarà utilizzata in R2.4); inoltre,

$$\left|\mathbf{sin}(\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1})\right| = \left|\mathbf{sin}(\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2})\right| \qquad \text{e} \qquad \left|\mathbf{cos}(\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1})\right| = \left|\mathbf{cos}(\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2})\right|$$

(le funzioni **sin** e **cos** saranno introdotte in R3.2).

Se poi non si considerano le rette $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ in un ordine particolare, l'ambiguità su che cosa si debba intendere per *angolo formato da* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ aumenta, potendosi considerare anche gli angoli opposti ad $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1}$ e $\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2}$; è comunque ancora

$$\left|\mathbf{sin}(\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1})\right| = \left|\mathbf{sin}(\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2})\right| = \left|\mathbf{sin}(\widehat{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_1})\right| = \left|\mathbf{sin}(\widehat{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_1})\right|$$

e

$$\left|\mathbf{cos}(\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1})\right| = \left|\mathbf{cos}(\widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2})\right| = \left|\mathbf{cos}(\widehat{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{a}_1})\right| = \left|\mathbf{cos}(\widehat{\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}_1})\right|.$$

R2.4 - Una descrizione delle rotazioni mediante la nozione di "angolo". Simmetrie centrali.

Teorema R2.4.1

Siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ due rette incidenti in un punto $\mathbf{C}$, e sia ϱ la rotazione $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$. Sia α_1 l'angolo formato da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e sia $\alpha := \alpha_1 + \alpha_1$.
Per ogni punto $\mathbf{P}$ del piano, $\varrho(\mathbf{P})$ è l'unico punto della circonferenza di centro $\mathbf{C}$ e raggio $d(\mathbf{C}, \mathbf{P})$ per il quale si ha $\widehat{\mathbf{PC}\varrho(\mathbf{P})} = \alpha$.

Dimostrazione – Sia $\boldsymbol{a}_1$ una delle due semirette individuate da $\mathbf{C}$ su $\boldsymbol{a}$, e sia $\boldsymbol{b}_1$ una delle due semirette individuate da $\mathbf{C}$ su $\boldsymbol{b}$; allora $\alpha_1 = \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1}$. Sia $\boldsymbol{r}$ la semiretta $\mathbf{CP}$, sia $\boldsymbol{r'}$ la semiretta $\mathbf{C}\varrho(\mathbf{P})$ e sia $\boldsymbol{r}_1 := \sigma_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{r})$. Allora

$$\boldsymbol{r'} = \varrho(\boldsymbol{r}) = \sigma_{\boldsymbol{b}}(\sigma_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{r})) = \sigma_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{r}_1).$$

Dunque

$$\widehat{\mathbf{PC}\varrho(\mathbf{P})} = \widehat{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r'}} = \widehat{\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_1} + \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{r'}}$$

per la definizione di somma di angoli.

Poiché $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ porta $\boldsymbol{r}$ in $\boldsymbol{r}_1$ e muta in sé $\boldsymbol{a}_1$,

$$\widehat{\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_1} = -\widehat{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{a}_1} = \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{r}_1};$$

poiché $\sigma_{\boldsymbol{b}}$ porta $\boldsymbol{r}_1$ in $\boldsymbol{r'}$ e muta in sé $\boldsymbol{b}_1$,

$$\widehat{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{r'}} = -\widehat{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{r}_1} = \widehat{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{b}_1};$$

in conclusione,

$$\widehat{\mathbf{PC}\varrho(\mathbf{P})} = \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_1} + \widehat{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{r'}} = \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{r}_1} + \widehat{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{b}_1} = \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1} + \widehat{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1}$$

come si voleva dimostrare.

Sia ϱ una rotazione, sia **C** il suo centro e siano $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ due rette incidenti in **C** tali che $\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$.

Sia α_1 l'angolo formato da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e sia $\alpha := \alpha_1 + \alpha_1$. L'angolo α si dice *angolo della rotazione* ϱ.

Per il teorema R2.4.1, questa definizione è ben posta, nel senso che α dipende effettivamente solo da ϱ e non dalle particolari rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ per le quali si ha $\varrho = \sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ (sappiamo dal teorema R1.6.1 che $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ possono essere scelte in infiniti modi).

Il teorema R2.4.1 ci consente in effetti di affermare che una rotazione risulta determinata quando ne vengano assegnati centro ed angolo; e ci permette di precisare l'enunciato del teorema R1.6.1:

Teorema R2.4.2

Siano **C** un punto del piano e α un angolo. Comunque scelte due rette $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ che formino un angolo α_1 tale che $\alpha = \alpha_1 + \alpha_1$, la rotazione di centro **C** e angolo α si può ottenere come composizione delle simmetrie assiali $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ e $\sigma_{\boldsymbol{b}}$.

Dimostrazione – Per il teorema R2.4.1, la rotazione $\sigma_{\boldsymbol{b}} \circ \sigma_{\boldsymbol{a}}$ ha centro **C** e angolo α.

Siano **C** un punto del piano e α un angolo. La rotazione di centro **C** e angolo α si chiama anche, confidenzialmente, "la rotazione di α attorno a **C**".

Esercizio [*] R2.4.3

Siano **A**, **B**, **C** tre punti del piano tali che $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 4$, $d(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = 5$ e $d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = 3$ (cosicché il triangolo **ABC** è rettangolo, con l'angolo $\mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{C}$ retto). Sia ϱ la rotazione di un angolo retto attorno ad **A**, e sia τ la traslazione che porta **B** in **C**. Si descrivano le composizioni $\tau \circ \varrho$ e $\varrho \circ \tau$, osservando che si tratta in entrambi i casi di rotazioni.

Sia **C** un punto del piano. La rotazione di un angolo piatto attorno a **C** si dice anche *simmetria centrale di centro* **C**.

Teorema R2.4.4

Sia **C** un punto del piano, e sia $\delta_{\mathbf{C}}$ la simmetria centrale di centro **C**. Per ogni punto **P** del piano, $\delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{P})$ è l'altro punto della retta **PC** che ha da **C** la stessa distanza di **P** (ossia, è il simmetrico di **P** mediante la simmetria assiale che ha per asse la retta per **C** ortogonale alla retta **PC**).

Dimostrazione – Siano $\boldsymbol{r}$ la retta **PC** e $\boldsymbol{r}_1$ la retta per **C** ortogonale a $\boldsymbol{r}$. Per definizione di simmetria centrale e per il teorema R2.4.2, $\delta_{\mathbf{C}} = \sigma_{\boldsymbol{r}_1} \circ \sigma_{\boldsymbol{r}}$. Pertanto

$$\delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{P}) = \sigma_{\boldsymbol{r}_1}(\sigma_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{P})) = \sigma_{\boldsymbol{r}_1}(\mathbf{P})$$

perché $\sigma_{\boldsymbol{r}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ essendo $\mathbf{P} \in \boldsymbol{r}$.

Teorema R2.4.5

Si riferisca il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico $\mathbf{O}\boldsymbol{xy}$, e sia $\mathbf{C} \equiv (x_{\mathbf{C}}, y_{\mathbf{C}})$. La simmetria centrale $\delta_{\mathbf{C}}$ di centro **C** ha equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x_{\mathbf{C}} - x \\ y' = 2y_{\mathbf{C}} - y \end{cases}$$

Dimostrazione – Per il teorema R2.4.2, $\delta_{\mathbf{C}}$ si può ottenere come composizione delle simmetrie assiali che hanno per assi le rette di equazioni $x = x_{\mathbf{C}}$ e $y = y_{\mathbf{C}}$. L'asserto segue allora subito dal teorema R1.3.6.

Osservazione R2.4.6

Come preannunciato in R1.6.7, per scrivere le equazioni della generica rotazione è necessario utilizzare le funzioni **sin** e **cos** che saranno introdotte in R3.2. L'appuntamento è per il teorema R3.5.2.

R3.- ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA PIANA

R3.1 - Introduzione.

Questo capitolo riporta i fatti di trigonometria piana che supponiamo noti dagli studi effettuati nella Scuola Secondaria Superiore. Sono poche nozioni essenziali: quelle che vengono utilizzate nel corso di "Istituzioni di Matematica"; utili per chi non conosce la materia, ma anche per chi ne ha studiata "troppa" e le ha forse perse di vista tra tanti risultati collaterali e un'infinità di formule.

Le dimostrazioni sono in genere omesse; gli interessati possono consultare qualunque manuale per la Scuola Secondaria Superiore. Gli studenti non devono però sentirsi incoraggiati ad "approfondire" sullo stesso manuale la materia studiando altri fatti qui non riportati: nessun argomento infatti si presta quanto la Trigonometria ad una incredibile proliferazione di teoremi e formule che in ultima analisi servono oggi solo a far sembrare vasta e difficile una materia che è invece almeno tanto semplice quanto è profonda e utile. Proprio per sottolineare che i risultati citati in questo capitolo sono sufficienti per l'uso "di tutti i giorni" della Trigonometria piana, ad esso segue il capitolo R4 dedicato alla risoluzione completa dei triangoli; questo argomento infatti, pur non essendo da considerarsi un prerequisito per il corso di "Istituzioni di Matematica", costituisce pur sempre lo scopo "storico" della Trigonometria piana ed ha applicazioni immediate in Fisica e in altre materie.

Supporremo fissato un SdR cartesiano $\mathbf{O}\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$ ortogonale, monometrico e positivamente orientato (cfr. [1], sez. 12.3); si noti che abbiamo indicato con $\bar{\boldsymbol{x}}$ l'asse delle ascisse: con $\boldsymbol{x}$ indicheremo invece la semiretta formata dai punti dell'asse $\bar{\boldsymbol{x}}$ che hanno ascissa non negativa (tale semiretta è detta anche *semiasse positivo delle ascisse*). La circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$) che ha centro nell'origine e raggio 1 sarà detta, seguendo una tradizione ormai consolidata, *circonferenza goniometrica*.

R3.2 - Le funzioni sin, cos, tg, cotg e le relazioni fondamentali.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme degli angoli. In questa sezione definiamo quattro funzioni $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dette "seno", "coseno", "tangente" e "cotangente" e indicate rispettivamente con **sin**, **cos**, **tg** e **cotg**.

Sia α un angolo. Per il teorema R2.2.1, esiste esattamente una semiretta $\boldsymbol{r}$ di origine **O** tale che $\widehat{\boldsymbol{xr}}$ rappresenta α. L'ordinata del punto in cui $\boldsymbol{r}$ incontra la circonferenza goniometrica si dice *seno di* α, e si indica con $\mathbf{sin}(\alpha)$; l'ascissa del punto in cui $\boldsymbol{r}$ incontra la circonferenza goniometrica si dice *coseno di* α, e si indica con $\mathbf{cos}(\alpha)$; l'ordinata del punto in cui la retta di $\boldsymbol{r}$ incontra la retta di equazione $\mathrm{x} = 1$ (che è la retta tangente in $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$ alla circonferenza goniometrica) si dice *tangente di* α, e si indica con $\mathbf{tg}(\alpha)$; l'ascissa del punto in cui la retta di $\boldsymbol{r}$ incontra la retta di equazione $\mathrm{y} = 1$ (che è la retta tangente in $\mathbf{U}_{\boldsymbol{y}}$ alla circonferenza goniometrica) si dice *cotangente di* α, e si indica con $\mathbf{cotg}(\alpha)$.

Si noti che **sin** e **cos** sono definite su tutto $\mathcal{A}$, **tg** non è definita per gli angoli retti e i loro opposti, **cotg** non è definita per gli angoli nulli e per gli angoli piatti.

Teorema R3.2.1

Per ogni angolo α, si ha

$$\mathbf{sin}^2(\alpha) + \mathbf{cos}^2(\alpha) = 1.$$

Dimostrazione $-$ Sia $\boldsymbol{r}$ la semiretta di origine **O** tale che $\widehat{\boldsymbol{xr}}$ rappresenta α; sia **R** il punto in cui $\boldsymbol{r}$ incontra la circonferenza goniometrica, e sia $\mathbf{R_1}$ la proiezione ortogonale di **R** sull'asse delle ascisse. Per come si sono definite ascissa e ordinata di **R**, $|\ \mathbf{sin}(\alpha)\ | = d(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ e $|\ \mathbf{cos}(\alpha)\ | = d(\mathbf{R_1}, \mathbf{O})$; poiché la circonferenza goniometrica ha raggio 1, $d(\mathbf{O}, \mathbf{R}) = 1$. L'asserto segue ora dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $\mathbf{ORR_1}$.

Teorema R3.2.2

Per ogni angolo α, si ha

$$\mathbf{tg}(\alpha) = \frac{\mathbf{sin}(\alpha)}{\mathbf{cos}(\alpha)}.$$

Dimostrazione $-$ Sia $\boldsymbol{r}$ la semiretta di origine **O** tale che $\widehat{\boldsymbol{xr}}$ rappresenta α; sia **R** il punto in cui $\boldsymbol{r}$ incontra la circonferenza goniometrica, e sia $\mathbf{R_1}$ la proiezione ortogonale di **R** sull'asse delle ascisse; sia **T** il punto in cui la retta di $\boldsymbol{r}$ incontra la retta di equazione $x = 1$.

È $\quad |\ \mathbf{sin}(\alpha)\ | = d(\mathbf{R}, \mathbf{R_1}), \quad |\ \mathbf{cos}(\alpha)\ | = d(\mathbf{R_1}, \mathbf{O}), \quad |\ \mathbf{tg}(\alpha)\ | = d(\mathbf{T}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}})$.

Gli angoli $\mathbf{R}\widehat{\mathbf{O}}\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{T}\widehat{\mathbf{O}}\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$ sono congruenti perché coincidono (se **R** appartiene al primo o quarto quadrante) o perché sono opposti al vertice (se **R** appartiene al secondo o terzo quadrante); in ogni caso, i triangoli rettangoli $\mathbf{ORR_1}$ e $\mathbf{OTU}_{\boldsymbol{x}}$ sono simili.

Ne segue che $$\frac{d(\mathbf{T}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}})}{d(\mathbf{O}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}})} = \frac{d(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})}{d(\mathbf{R_1}, \mathbf{O})}.$$

Poiché $d(\mathbf{O}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}) = 1$ (per definizione di $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$), si è intanto dimostrato che

$$(\bigstar) \qquad |\ \mathbf{tg}(\alpha)| = \frac{|\mathbf{sin}(\alpha)|}{|\mathbf{cos}(\alpha)|}.$$

Per completare la dimostrazione, basta distinguere quattro casi a seconda che **R** appartenga al primo, secondo terzo o quarto quadrante.

Se **R** appartiene al primo quadrante, le sue coordinate sono positive; anche l'ordinata di **T** è positiva, cosicché $\mathbf{tg}(\alpha) = |\mathbf{tg}(\alpha)|$, $\mathbf{sin}(\alpha) = |\mathbf{sin}(\alpha)|$, $\mathbf{cos}(\alpha) = |\mathbf{cos}(\alpha)|$, e dalla (★) segue subito l'asserto.

Se **R** appartiene al secondo quadrante, la sua ascissa è negativa e la sua ordinata è positiva; l'ordinata di **T** è negativa, cosicché $\mathbf{tg}(\alpha) = -|\mathbf{tg}(\alpha)|$, $\mathbf{sin}(\alpha) = |\mathbf{sin}(\alpha)|$, $\mathbf{cos}(\alpha) = -|\mathbf{cos}(\alpha)|$, e dalla (★) segue ancora l'asserto.

Analogamente si ragiona negli altri due casi.

Osservazione R3.2.3

Per effetto dei teoremi R3.2.1 e R3.2.2, espressioni assai diverse costruite utilizzando le funzioni trigonometriche possono rappresentare la stessa funzione. Si ha, ad esempio,

$$\frac{1}{\mathbf{cos^2}(\alpha)} = 1 + \mathbf{tg^2}(\alpha).$$

La situazione potrebbe sembrare analoga a quella ben nota dei polinomi, dove espressioni formalmente molto diverse rappresentano lo stesso polinomio: ad esempio,

$$x(y-z+1) - y(x-z-1) + z(x-y+1) = x+y+z\ .$$

In realtà, tutti i polinomi possono essere scritti in una "forma canonica" (o "forma standard") ed esiste un algoritmo molto semplice per decidere se due espressioni rappresentano lo stesso polinomio; mentre non esiste una "forma canonica" per le espressioni costruite con le funzioni trigonometriche, né è sempre facile stabilire se due tali espressioni rappresentino la stessa funzione.

Teorema R3.2.4

Per ogni angolo α, si ha

$$\mathbf{cotg}(\alpha) = \frac{\mathbf{cos}(\alpha)}{\mathbf{sin}(\alpha)}.$$

Dimostrazione – La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema R3.2.2 (questa volta, però, $\mathbf{R_1}$ sarà la proiezione ortogonale di **R** sull'asse delle ordinate e **T** sarà il punto in cui la retta di ***r*** incontra la retta di equazione $\mathrm{y} = 1$).

Teorema R3.2.5

Si ha $\mathbf{sin}(\mathcal{A}) = [-1, 1]$. L'unico angolo il cui seno è -1 è l'opposto dell'angolo retto; l'unico angolo il cui seno è 1 è l'angolo retto. Per ogni $y_0 \in (-1, 1)$, esistono esattamente due angoli α tali che

$$\mathbf{sin}(\alpha) = y_0.$$

Dimostrazione $-$ Sia $y_0 \in \mathbb{R}$, e sia α un angolo il cui seno è y_0. Sia $\boldsymbol{r}$ la semiretta di origine **O** tale che $\widehat{\boldsymbol{xr}}$ rappresenta α: per definizione di **sin**, $\boldsymbol{r}$ incontra la circonferenza goniometrica $\boldsymbol{\Gamma}$ in un punto di ordinata y_0; e viceversa se **P** è un punto di $\boldsymbol{\Gamma}$ di ordinata y_0 si ha che $\mathbf{sin}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}\widehat{\mathbf{O}}\mathbf{P}) = y_0$. I punti di $\boldsymbol{\Gamma}$ che hanno ordinata y_0 si ottengono come intersezione di $\boldsymbol{\Gamma}$ con la retta di equazione y $= y_0$. Tale retta ha distanza $|y_0|$ dal centro **O** di $\boldsymbol{\Gamma}$ e dunque: non incontra $\boldsymbol{\Gamma}$ se $|y_0| > 1$; è tangente a $\boldsymbol{\Gamma}$ se $|y_0| = 1$; è secante a $\boldsymbol{\Gamma}$ se $|y_0| < 1$. L'asserto è ora immediato.

Teorema R3.2.6

Si ha $\mathbf{cos}(\mathcal{A}) = [-1, 1]$. L'unico angolo il cui coseno è -1 è l'angolo piatto; l'unico angolo il cui coseno è 1 è l'angolo nullo. Per ogni $y_0 \in (-1, 1)$, esistono esattamente due angoli α tali che

$$\mathbf{cos}(\alpha) = y_0.$$

Dimostrazione $-$ Sia $y_0 \in \mathbb{R}$, e sia α un angolo il cui coseno è y_0. Sia $\boldsymbol{r}$ la semiretta di origine **O** tale che $\widehat{\boldsymbol{xr}}$ rappresenta α: per definizione di **cos**, $\boldsymbol{r}$ incontra la circonferenza goniometrica $\boldsymbol{\Gamma}$ in un punto di ascissa y_0; e viceversa se **P** è un punto di $\boldsymbol{\Gamma}$ di ascissa y_0 si ha che $\mathbf{cos}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}\widehat{\mathbf{O}}\mathbf{P}) = y_0$. I punti di $\boldsymbol{\Gamma}$ che hanno ascissa y_0 si ottengono come intersezione di $\boldsymbol{\Gamma}$ con la retta di equazione x $= y_0$. Tale retta ha distanza $|y_0|$ dal centro **O** di $\boldsymbol{\Gamma}$ e dunque: non incontra $\boldsymbol{\Gamma}$ se $|y_0| > 1$; è tangente a $\boldsymbol{\Gamma}$ se $|y_0| = 1$; è secante a $\boldsymbol{\Gamma}$ se $|y_0| < 1$. L'asserto è ora immediato.

Teorema R3.2.7

Si ha $\mathbf{tg}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, esistono esattamente due angoli α tali che

$$\mathbf{tg}(\alpha) = y_0$$

e ciascuno di essi si ottiene sommando all'altro un angolo piatto.

Dimostrazione $-$ Sia $y_0 \in \mathbb{R}$, e sia α un angolo la cui tangente è y_0. Sia $\boldsymbol{r}$ la semiretta di origine **O** tale che $\widehat{\boldsymbol{xr}}$ rappresenta α: per definizione di **tg**, la retta di $\boldsymbol{r}$ incontra la retta $\boldsymbol{t}$ di equazione x $= 1$ nel punto di ordinata y_0; e viceversa se **P** è il punto di $\boldsymbol{t}$ di ordinata y_0 dette $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ le due semirette individuate dall'origine sulla retta **OP** si ha che $\mathbf{tg}(\widehat{\boldsymbol{xr}}) = y_0$ e $\mathbf{tg}(\widehat{\boldsymbol{xs}}) = y_0$. L'asserto è ora immediato.

Teorema R3.2.8

Si ha $\mathbf{cotg}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}$. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, esistono esattamente due angoli α tali che

$$\mathbf{cotg}(\alpha) = x_0$$

e ciascuno di essi si ottiene sommando all'altro un angolo piatto.

Dimostrazione – Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, e sia α un angolo la cui cotangente è x_0. Sia ***r*** la semiretta di origine **O** tale che $\widehat{\boldsymbol{xr}}$ rappresenta α: per definizione di **cotg**, la retta di ***r*** incontra la retta ***t*** di equazione $y = 1$ nel punto di ascissa x_0; e viceversa se **P** è il punto di ***t*** di ascissa x_0 dette ***r*** e ***s*** le due semirette individuate dall'origine sulla retta **OP** si ha che $\mathbf{tg}(\widehat{\boldsymbol{xr}}) = x_0$ e $\mathbf{tg}(\widehat{\boldsymbol{xs}}) = x_0$. L'asserto è ora immediato.

Teorema R3.2.9

Comunque presi due angoli α e β, si ha

$$\mathbf{sin}(\alpha+\beta) = \mathbf{sin}(\alpha)\mathbf{cos}(\beta) + \mathbf{cos}(\alpha)\mathbf{sin}(\beta);$$

$$\mathbf{cos}(\alpha+\beta) = \mathbf{cos}(\alpha)\mathbf{cos}(\beta) - \mathbf{sin}(\alpha)\mathbf{sin}(\beta);$$

$$\mathbf{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathbf{tg}(\alpha)+\mathbf{tg}(\beta)}{1-\mathbf{tg}(\alpha)\mathbf{tg}(\beta)}.$$

Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Teorema R3.2.10

Siano α, β angoli.

(1) Se α e β sono complementari, e dunque $\alpha+\beta$ è un angolo retto,

$$\mathbf{sin}(\beta) = \mathbf{cos}(\alpha);$$
$$\mathbf{cos}(\beta) = \mathbf{sin}(\alpha);$$
$$\mathbf{tg}(\beta) = \mathbf{cotg}(\alpha);$$

(2) Se β è un angolo retto,

$$\mathbf{sin}(\alpha+\beta) = \mathbf{cos}(\alpha);$$
$$\mathbf{cos}(\alpha+\beta) = -\mathbf{sin}(\alpha);$$
$$\mathbf{tg}(\alpha+\beta) = -\mathbf{cotg}(\alpha);$$

(3) Se α e β sono supplementari, e dunque $\alpha+\beta$ è un angolo piatto,

$$\mathbf{sin}(\beta) = \mathbf{sin}(\alpha);$$
$$\mathbf{cos}(\beta) = -\mathbf{cos}(\alpha);$$
$$\mathbf{tg}(\beta) = -\mathbf{tg}(\alpha);$$

(4) Se β è un angolo piatto,

$$\mathbf{sin}(\alpha+\beta) = -\mathbf{sin}(\alpha);$$
$$\mathbf{cos}(\alpha+\beta) = -\mathbf{cos}(\alpha);$$
$$\mathbf{tg}(\alpha+\beta) = \mathbf{tg}(\alpha);$$

(5) Se α e β sono esplementari, e dunque $\alpha+\beta$ è un angolo nullo, cioè $\beta = -\alpha$,

$$\mathbf{sin}(-\alpha) = -\mathbf{sin}(\alpha);$$
$$\mathbf{cos}(-\alpha) = \mathbf{cos}(\alpha);$$
$$\mathbf{tg}(-\alpha) = -\mathbf{tg}(\alpha);$$

Dimostrazione – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Per alcuni angoli è possibile esprimere con facilità l'esatto valore delle funzioni **sin**, **cos** e **tg**. Semplici considerazioni geometriche, che comunque omettiamo, consentono ad esempio di affermare che:

il seno dell'angolo nullo è 0;

il seno dell'angolo di ampiezza $\frac{\pi}{12}$ radianti (15 gradi sessagesimali) è $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

il seno dell'angolo di ampiezza $\frac{\pi}{6}$ radianti (30 gradi sessagesimali) è $\frac{1}{2}$;

il seno dell'angolo di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ radianti (45 gradi sessagesimali) è $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

il seno dell'angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ radianti (60 gradi sessagesimali) è $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

il seno dell'angolo di ampiezza $\frac{5\pi}{12}$ radianti (75 gradi sessagesimali) è $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

il seno dell'angolo di ampiezza $\frac{\pi}{2}$ radianti (90 gradi sessagesimali) è 1.

Questi valori sono anche facilmente memorizzabili; si osservi ad esempio che per gli angoli di ampiezza 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ radianti (cioè 0, 30, 45, 60, 90 gradi sessagesimali) il seno è della forma $\frac{\sqrt{\bigstar}}{2}$, dove $\bigstar$ assume rispettivamente i valori 0, 1, 2, 3 e 4. Da essi si ricavano subito i valori del coseno per gli stessi angoli (mediante la (1) del teorema R3.2.10) e poi quelli della tangente (mediante il teorema R3.2.2). Il lettore è invitato a costruirsi una tabella con i valori di **sin**, **cos** e **tg** per gli angoli di ampiezza 0, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{2}$ radianti e per i loro supplementari, estendendola poi anche agli esplementari.

Generalmente, tranne i casi di cui si è detto sopra, di **sin**, **cos** e **tg** si usano solo valori approssimati, che vengono forniti dalle calcolatrici tascabili oppure da appositi prontuari stampati (detti "*Tavole trigonometriche*"; questi ultimi però sono piuttosto complicati ad usare e vanno ormai scomparendo dal commercio).

R3.3 - Le funzioni trigonometriche $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

In questa sezione definiamo quattro funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dette "seno", "coseno", "tangente" e "cotangente" (e indicate rispettivamente con **sin**, **cos**, **tg** e **cotg**) proprio come quelle introdotte nella sez. R3.2. Non c'è pericolo di confondere le funzioni che hanno lo stesso nome, perché hanno diverso dominio (per una, l'insieme $\mathcal{A}$ degli angoli; per l'altra, l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali); è bene però fare un po' di attenzione.

Sia $x \in \mathbb{R}$. Se $x \in [0, 2\pi)$, si pone

$$\mathbf{sin}(x) := \mathbf{sin}(\alpha), \quad \text{dove } \alpha \text{ è l'(unico) angolo di ampiezza (in radianti) } x$$

e analogamente si definiscono le funzioni **cos**, **tg** e **cotg**.

Le funzioni **sin** e **cos** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ora introdotte hanno per dominio l'intervallo $[0, 2\pi)$; la funzione **tg** $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ora introdotta ha per dominio $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$; e la funzione **cotg** $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ora introdotta ha per dominio $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Tali funzioni poi si "prolungano per periodicità", procedendo come segue: sia k la "parte intera" di $\frac{x}{2\pi}$ ([4]) e sia $x_0 := x - 2k\pi$ (cosicché $x = x_0 + 2k\pi$ con $x_0 \in [0, 2\pi)$); si pone $\mathbf{sin}(x) := \mathbf{sin}(x_0)$ (dove il valore di $\mathbf{sin}(x_0)$ è calcolato come sopra).

Analogamente si procede per le funzioni **cos**, **tg** e **cotg**.

Le funzioni **sin** e **cos** così definite risultano periodiche, di periodo 2π, con dominio $\mathbb{R}$; le funzioni **tg** e **cotg** così definite risultano periodiche, di periodo π, e si ha:

$$\mathcal{D}(\mathbf{tg}) = \mathbb{R} \backslash \{\vartheta \in \mathbb{R} / \vartheta = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}\} \;;$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{cotg}) = \mathbb{R} \backslash \{\vartheta \in \mathbb{R} / \vartheta = k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}\} \;.$$

Dalla definizione è facile dedurre in prima approssimazione il grafico di **sin**, **cos**, **tg** e **cotg**.

Si noti che <u>si</u> <u>otterrebbero</u> <u>funzioni</u> <u>diverse</u> se si misurasse l'ampiezza degli angoli in gradi sessagesimali o centesimali o altrimenti; in particolare, non sarebbero validi il teorema R3.4.1, il corollario R3.4.2 e le loro importanti conseguenze (ad esempio, i teoremi 16.5.6, 17.1.4, 17.4.1, 18.2.15 e 18.2.16 di [1]).

Per le funzioni **sin**, **cos**, **tg** e **cotg** definite in questa sezione continuano a valere i risultati della sez. R3.2, opportunamente riformulati. Riportiamo i più significativi, naturalmente omettendo anche questa volta le dimostrazioni.

[4] Cioè, k è il più grande numero intero non superiore a $\frac{x}{2\pi}$ (cfr. 15.1 e l'esercizio 15.1.1 in [1]). Si noti che allora $k \leq \frac{x}{2\pi} < k+1$ e dunque $x \geq 2k\pi$, $x < 2(k+1)\pi$, ossia $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

Teorema R3.3.1

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

(1) $\mathbf{sin^2}(x) + \mathbf{cos^2}(x) = 1$;

(2) $\mathbf{tg}(x) = \dfrac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)}$.

Teorema R3.3.2

Comunque presi x, y $\in \mathbb{R}$, si ha

(1) $\mathbf{sin}(x + \mathrm{y}) = \mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(\mathrm{y}) + \mathbf{cos}(x)\mathbf{sin}(\mathrm{y})$;

(2) $\mathbf{cos}(x + \mathrm{y}) = \mathbf{cos}(x)\mathbf{cos}(\mathrm{y}) - \mathbf{sin}(x)\mathbf{sin}(\mathrm{y})$;

(3) $\mathbf{tg}(x + \mathrm{y}) = \dfrac{\mathbf{tg}(x)+\mathbf{tg}(\mathrm{y})}{1-\mathbf{tg}(x)\mathbf{tg}(\mathrm{y})}$.

Teorema R3.3.3

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

(1) $\mathbf{sin}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathbf{cos}(x)$; $\mathbf{cos}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathbf{sin}(x)$; $\mathbf{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathbf{cotg}(x)$;

(2) $\mathbf{sin}(x + \frac{\pi}{2}) = \mathbf{cos}(x)$; $\mathbf{cos}(x + \frac{\pi}{2}) = -\mathbf{sin}(x)$; $\mathbf{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = -\mathbf{cotg}(x)$;

(3) $\mathbf{sin}(\pi - x) = \mathbf{sin}(x)$; $\mathbf{cos}(\pi - x) = -\mathbf{cos}(x)$; $\mathbf{tg}(\pi - x) = -\mathbf{tg}(x)$;

(4) $\mathbf{sin}(x + \pi) = -\mathbf{sin}(x)$; $\mathbf{cos}(x + \pi) = -\mathbf{cos}(x)$; $\mathbf{tg}(x + \pi) = \mathbf{tg}(x)$;

(5) $\mathbf{sin}(-x) = -\mathbf{sin}(x)$; $\mathbf{cos}(-x) = \mathbf{cos}(x)$; $\mathbf{tg}(-x) = -\mathbf{tg}(x)$.

Per i teoremi R3.2.5, R3.2.6, R3.2.7 e R3.2.8, le funzioni **sin**, **cos**, **tg**, **cotg** non sono iniettive, e dunque non sono invertibili. Sono però iniettive, e dunque ammettono funzione inversa (cfr. [1], sez. 4.6) le loro restrizioni (cfr. [1], sez. 4.5) ad opportuni intervalli. Si conviene di chiamare *funzioni trigonometriche inverse* le seguenti funzioni:

arcsin (“*arcoseno*”), funzione inversa della restrizione di **sin** a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

arccos (“*arcocoseno*”), funzione inversa della restrizione di **cos** a $[0, \pi]$;

arctg (“*arcotangente*”), funzione inversa della restrizione di **tg** a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

arccotg (“*arcocotangente*”), funzione inversa della restrizione di **cotg** a $[0, \pi]$.

R3.4 - Alcuni risultati "tecnici".

Teorema R3.4.1

Se $a \in [-1, 1]$, si ha $\quad |\,\mathbf{sin}(a)\,| \ \leq \ |\,a\,| \ \leq \ |\,\mathbf{tg}(a)\,|$.

Dimostrazione – Si tratta di provare che

$$(0 \leq a \leq 1) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{sin}(a) \leq a \leq \mathbf{tg}(a)).$$

Infatti, se $a \geq 0$ ciò equivale all'asserto perché è anche $\mathbf{sin}(a) \geq 0$ e $\mathbf{tg}(a) \geq 0$; e possiamo supporre $a \geq 0$ perché (cfr. la (5) del teorema R3.3.3) $|\,\mathbf{sin}(a)\,| = \mathbf{sin}(\,|\,a\,|\,)$ e $|\,\mathbf{tg}(a)\,| = \mathbf{tg}(\,|\,a\,|\,)$.

Sia allora $\boldsymbol{r}$ la semiretta di origine **O** tale che $\widehat{\boldsymbol{xr}}$ ha (in radianti) ampiezza a; sia **R** il punto in cui $\boldsymbol{r}$ incontra la circonferenza goniometrica, e sia $\mathbf{R_1}$ la proiezione ortogonale di **R** sull'asse delle ascisse; sia **T** il punto in cui la retta di $\boldsymbol{r}$ incontra la retta di equazione $\mathrm{x} = 1$.

Possiamo supporre $0 < a \leq 1$ (infatti, se $a = 0$ l'asserto è di immediata verifica); dunque le semirette $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{r}$ sono distinte, e i punti **R**, $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}$, **T** sono tutti distinti fra loro; inoltre, **R** e **T** sono situati nel primo quadrante.

Il triangolo $\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{R}$ è contenuto nel settore circolare $\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{R}$, che a sua volta è contenuto nel triangolo $\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{T}$; pertanto l'area del triangolo $\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{R}$ è minore di quella del settore circolare $\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{R}$ che a sua volta è minore di quella del triangolo $\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{T}$, ossia [5]

$$\frac{d(\mathbf{O}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}) \cdot d(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})}{2} < \frac{a}{2} < \frac{d(\mathbf{O}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}) \cdot d(\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{T})}{2}$$

cioè, ricordando che $d(\mathbf{O}, \mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}) = 1$, $\quad d(\mathbf{R}, \mathbf{R_1}) < a < d(\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{T})$ $\quad$ da cui l'asserto perché, essendo **R** e **T** situati nel primo quadrante, si ha $\mathbf{sin}(a) = d(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ e $\mathbf{tg}(a) = d(\mathbf{U}_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{T})$.

Corollario R3.4.2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\quad |\,\mathbf{sin}(x)\,| \ \leq \ |\,x\,|$.

Dimostrazione – L'asserto è ovvio se $|\,x\,| > 1$; per $|\,x\,| \leq 1$ è stato provato nel teorema R3.4.1.

Teorema R3.4.3

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\quad 1 - \mathbf{cos}(x) = 2\mathbf{sin}^2(\frac{x}{2})$.

Dimostrazione – Segue da

$$\mathbf{cos}(x) = \mathbf{cos}(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}) = \mathbf{cos}^2(\tfrac{x}{2}) - \mathbf{sin}^2(\tfrac{x}{2}) = 1 - 2\mathbf{sin}^2(\tfrac{x}{2}).$$

---

[5] L'area di un settore circolare proprio è direttamente proporzionale all'ampiezza dell'angolo al centro che lo sottende; confrontando l'area $\mathcal{S}$ del settore circolare $\mathbf{OU}_{\boldsymbol{x}}\mathbf{R}$ con l'area $\frac{\pi}{2}$ del semicerchio di raggio 1, si ha che $\mathcal{S} : \frac{\pi}{2} = a : \pi$, da cui $\mathcal{S} = \frac{a}{2}$.

Teorema R3.4.4

Comunque presi x, $y \in \mathbb{R}$,

$$|\ \mathbf{sin}(x+y)\ |\ \geq\ |\ \mathbf{sin}(x) - \mathbf{sin}(y)\ |$$

e la diseguaglianza vale in senso stretto purché sia $\mathbf{sin}(x) \neq 0$, $\mathbf{sin}(y) \neq 0$ e $\mathbf{sin}(x+y) \neq 0$.

Dimostrazione – Essendo positivi ambo i membri, la diseguaglianza

$$|\ \mathbf{sin}(x+y)\ |\ \geq\ |\ \mathbf{sin}(x) - \mathbf{sin}(y)\ |$$

equivale alla

$$|\ \mathbf{sin}(x+y)\ |^{\,2} \geq\ |\ \mathbf{sin}(x) - \mathbf{sin}(y)\ |^{\,2}$$

ossia (ricordando la (1) del teorema R3.3.2) alla

$$(\mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(y) + \mathbf{cos}(x)\mathbf{sin}(y))^2 \geq (\mathbf{sin}(x) - \mathbf{sin}(y))^2.$$

Sviluppando i quadrati, si trova che dobbiamo dimostrare che

$$\mathbf{sin}^2(x)\mathbf{cos}^2(y) + \mathbf{cos}^2(x)\mathbf{sin}^2(y) + 2\,\mathbf{sin}(x)\mathbf{cos}(y)\mathbf{cos}(x)\mathbf{sin}(y) \geq \mathbf{sin}^2(x) + \mathbf{sin}^2(y) - 2\,\mathbf{sin}(x)\mathbf{sin}(y)$$

ossia che

$$2\mathbf{sin}(x)\mathbf{sin}(y)(1 + \mathbf{cos}(x)\mathbf{cos}(y)) \geq \mathbf{sin}^2(x)(1 - \mathbf{cos}^2(y)) + \mathbf{sin}^2(y)(1 - \mathbf{cos}^2(x))$$

cioè

$$2\mathbf{sin}(x)\mathbf{sin}(y)(1 + \mathbf{cos}(x)\mathbf{cos}(y)) \geq 2\mathbf{sin}^2(x)\mathbf{sin}^2(y).$$

Se $\mathbf{sin}(x) = 0$ oppure $\mathbf{cos}(x) = 0$, la diseguaglianza che vogliamo provare è banalmente una uguaglianza; possiamo dunque supporre $\mathbf{sin}(x) \neq 0$ e $\mathbf{sin}(y) \neq 0$, e dividere ambo i membri per $2\mathbf{sin}(x)\mathbf{sin}(y)$ ottenendo così

$$1 + \mathbf{cos}(x)\mathbf{cos}(y) \geq \mathbf{sin}(x)\mathbf{sin}(y)$$

ossia (ricordando la (2) del teorema R3.3.2)

$$1 + \mathbf{cos}(x+y) \geq 0.$$

Quest'ultima diseguaglianza è immediata, e vale in senso stretto purché sia $\mathbf{cos}(x+y) \neq -1$ ossia $\mathbf{sin}(x+y) \neq 0$.

L'asserto è così completamente provato.

Esercizio R3.4.5

Si dimostri che per ogni $x \in \mathbb{R}$ è

$$|\ \mathbf{sin}(x)\ |\ +\ |\ \mathbf{cos}(x)\ |\ \geq 1$$

precisando per quali valori di x la diseguaglianza vale in senso stretto.
Si dia una interpretazione geometrica dei risultati trovati.

R3.5 - Le equazioni delle isometrie.

In tutta questa sezione supporremo di aver riferito il piano a un SdR cartesiano ortogonale monometrico **Oxy**.

Teorema R3.5.1

Sia α un angolo. La rotazione di centro **O** e angolo α ha equazioni

$$\begin{cases} x' = x \cdot \mathbf{cos}(\alpha) - y \cdot \mathbf{sin}(\alpha) \\ y' = x \cdot \mathbf{sin}(\alpha) + y \cdot \mathbf{cos}(\alpha) \end{cases}$$

Dimostrazione – Sia $\mathbf{P_0} \equiv (x_0, y_0)$ un punto del piano. Se la semiretta $\mathbf{OP_0}$ forma l'angolo β con il semiasse positivo delle ascisse, detta d la distanza di $\mathbf{P_0}$ da **O** si ha

$$x_0 = d \cdot \mathbf{cos}(\beta) \qquad \text{e} \qquad y_0 = d \cdot \mathbf{sin}(\beta).$$

Ciò si può vedere direttamente, come facile conseguenza delle definizioni di **sin** e **cos**, oppure applicando il teorema R4.2.2 e le relazioni (1) del teorema R3.3.3 al triangolo rettangolo $\mathbf{OP_0P_0'}$ (dove $\mathbf{P_0'}$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{P_0}$ sull'asse delle ascisse).

Sia $\mathbf{P_0'} \equiv (x_0', y_0')$ l'immagine di $\mathbf{P_0}$ mediante la rotazione di centro **O** e angolo α; la distanza di $\mathbf{P_0'}$ da **O** è ancora d, mentre la semiretta $\mathbf{OP_0'}$ forma col semiasse positivo delle ascisse l'angolo $\alpha + \beta$; pertanto,

$$x_0' = d \cdot \mathbf{cos}(\alpha + \beta) \qquad \text{e} \qquad y_0' = d \cdot \mathbf{sin}(\alpha + \beta).$$

Applicando le formule ("di addizione") del teorema R3.3.2, si trova che

$$x_0' = d \cdot \mathbf{cos}(\alpha + \beta) = d \cdot \mathbf{cos}(\alpha) \cdot \mathbf{cos}(\beta) - d \cdot \mathbf{sin}(\alpha) \cdot \mathbf{sin}(\beta) = x_0 \cdot \mathbf{cos}(\alpha) - y_0 \cdot \mathbf{sin}(\alpha)$$

e

$$y_0' = d \cdot \mathbf{sin}(\alpha + \beta) = d \cdot \mathbf{sin}(\alpha) \cdot \mathbf{cos}(\beta) + d \cdot \mathbf{cos}(\alpha) \cdot \mathbf{sin}(\beta) = x_0 \cdot \mathbf{sin}(\alpha) + y_0 \cdot \mathbf{cos}(\alpha)$$

come si voleva.

Teorema R3.5.2

Ogni isometria pari ha equazioni della forma

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} x' = x \cdot \mathbf{cos}(\alpha) - y \cdot \mathbf{sin}(\alpha) + h \\ y' = x \cdot \mathbf{sin}(\alpha) + y \cdot \mathbf{cos}(\alpha) + k \end{cases}$$

per un opportuno angolo α e per opportuni numeri reali h e k. Se α è l'angolo nullo, si tratta di una traslazione; se α non è l'angolo nullo, si tratta di una rotazione (ma, generalmente, non di angolo α).

Dimostrazione – Nel teorema R1.5.7 abbiamo caratterizzato le equazioni delle traslazioni; è immediato controllare che si ottengono dalle $(\bigstar)$ se e soltanto se α è l'angolo nullo.

Per il teorema R1.6.6 e per il teorema R3.5.1, ogni rotazione ha equazioni della forma (★); viceversa, equazioni della forma (★) rappresentano (per i teoremi R3.5.1 e R1.5.7) la composizione di una rotazione e di una traslazione, ossia (per il teorema R1.6.5) una rotazione.

Teorema R3.5.3

Ogni isometria dispari ha equazioni della forma

$$\begin{cases} x' = x \cdot \mathbf{cos}(\alpha) + y \cdot \mathbf{sin}(\alpha) + h \\ y' = x \cdot \mathbf{sin}(\alpha) - y \cdot \mathbf{cos}(\alpha) + k \end{cases}$$

per un opportuno angolo α e per opportuni numeri reali h e k.

Dimostrazione – Per il teorema R1.7.5, ogni isometria dispari si può esprimere come composizione della simmetria assiale $\sigma_{\boldsymbol{x}}$ che ha per asse l'asse delle ascisse e di una opportuna isometria pari. Dai teoremi R1.3.6 e R3.5.2 segue subito l'asserto.

Teorema R3.5.4

Ogni isometria ha equazioni della forma

$$(\circ) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$$

dove $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$ oppure $a_1 b_2 - a_2 b_1 = -1$; se è un'isometria pari, allora $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$, se è un'isometria dispari allora $a_1 b_2 - a_2 b_1 = -1$.
Ma equazioni della forma $(\circ)$ con $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$ non rappresentano necessariamente una isometria: ciò avviene solo se esiste un angolo α tale che

$$a_1 = b_2 = \mathbf{cos}(\alpha) \quad \text{e} \quad a_2 = -b_1 = \mathbf{sin}(\alpha)$$

oppure tale che

$$a_1 = -b_2 = \mathbf{cos}(\alpha) \quad \text{e} \quad b_1 = a_2 = \mathbf{sin}(\alpha).$$

Dimostrazione – Ovvio.

R4.- LA “RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI”

R4.1 - Introduzione.

Sia $\mathcal{T}$ un triangolo; esso è individuato da tre punti, che si dicono *vertici* di $\mathcal{T}$. Si dice *lato* di $\mathcal{T}$ ciascuno dei tre segmenti i cui estremi sono vertici di $\mathcal{T}$. Si dice *angolo interno* di $\mathcal{T}$ ciascuno dei tre angoli convessi che hanno il vertice coincidente con uno dei vertici di $\mathcal{T}$ e i lati contenenti lati di $\mathcal{T}$. I lati di $\mathcal{T}$ e gli angoli interni di $\mathcal{T}$ sono detti *elementi* di $\mathcal{T}$.

Generalmente interessa studiare un triangolo a meno di isometrie. Uno dei classici problemi in proposito è il seguente: noti (a meno di isometrie) tre elementi di $\mathcal{T}$, determinare (a meno di isometrie) gli altri tre. È chiaro che se gli elementi noti sono i tre angoli il problema è impossibile oppure ha infinite soluzioni. I classici “criteri di congruenza dei triangoli” permettono di affermare che il problema ha al più una soluzione se i tre elementi noti sono: i tre lati; oppure un lato e due angoli; oppure due lati e l’angolo “compreso” (cioè, l’angolo che ha per vertice il punto comune a tali lati). Il problema può avere fino a due soluzioni se gli elementi noti sono due lati e un angolo “non compreso” (cioè, un angolo il cui vertice appartiene a uno solo di tali lati). In questa sezione esponiamo, caso per caso, i semplici algoritmi risolutivi.

Fissiamo in primo luogo la notazione. Poiché i lati noti del triangolo sono dati a meno di isometrie (e quelli incogniti verranno determinati a meno di isometrie) è opportuno considerare in luogo di essi la loro misura. Siano **A**, **B** e **C** i vertici del triangolo: indichiamo con α l’angolo interno di vertice **A** e con a la lunghezza del lato **BC**; con β l’angolo interno di vertice **B** e con b la lunghezza del lato **AC**; con γ l’angolo interno di vertice **C** e con c la lunghezza del lato **AB**.

R4.2 - I teoremi.

Teorema R4.2.1 (relazione fondamentale tra gli angoli interni di un triangolo)

$\alpha + \beta + \gamma$ è un angolo piatto.

Dimostrazione – Si tratta di un classico risultato della geometria euclidea; ne omettiamo la dimostrazione. Si notino alcune importanti conseguenze: in un triangolo c’è al più un angolo ottuso; noti due angoli interni di un triangolo, il terzo si ottiene sommando a un angolo piatto l’opposto della loro somma.

Teorema R4.2.2 (“dei seni”; attribuito a Levi Ben Gerson, 1288-1344)

Si ha
$$\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{b}{\mathbf{sin}(\beta)} = \frac{c}{\mathbf{sin}(\gamma)}.$$

Dimostrazione – Si prova che ciascuno dei tre rapporti è uguale alla lunghezza del diametro della circonferenza circoscritta a $\mathcal{T}$. Omettiamo i dettagli.

Teorema R4.2.3 (“del coseno”, o “di Carnot”; attribuito a François Viéte, 1540-1603)

Si ha
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \mathbf{cos}(\alpha) \ ;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \mathbf{cos}(\beta) \ ;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \mathbf{cos}(\gamma) \ .$$

Dimostrazione – Omettiamo anche questa dimostrazione. Notiamo che il teorema può essere interpretato come una “generalizzazione” del teorema di Pitagora. Inoltre, da esso segue che: se vale la relazione “pitagorica” $a^2 = b^2 + c^2$, allora $\mathbf{cos}(\alpha) = 0$ e dunque il triangolo dato è rettangolo (con l’angolo interno di vertice **A** retto).

Teorema R4.2.4

Siano a_0, b_0, c_0 numeri reali positivi con $a_0 \geq b_0 \geq c_0$. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un triangolo i cui lati abbiano lunghezza rispettivamente a_0, b_0 e c_0 è che valga la relazione
$$a_0 < b_0 + c_0.$$

Dimostrazione – È anche questo un classico risultato della geometria euclidea. Ne omettiamo la dimostrazione.

Teorema R4.2.5

Siano a_0, b_0, c_0 numeri reali positivi, e siano α_0, β_0, γ_0 angoli convessi. Esiste un triangolo in cui α_0, β_0 e γ_0 sono gli angoli interni e in cui i lati opposti ad α_0, β_0 e γ_0 hanno lunghezza rispettivamente a_0, b_0 e c_0 se e soltanto se valgono le relazioni

(1) $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0$ è un angolo piatto

e

(2)
$$\frac{a_0}{\mathbf{sin}(\alpha_0)} = \frac{b_0}{\mathbf{sin}(\beta_0)} = \frac{c_0}{\mathbf{sin}(\gamma_0)}.$$

Dimostrazione – Che le (1) e (2) costituiscano condizioni necessarie per l'esistenza del triangolo è il contenuto dei teoremi R4.2.1 e R4.2.2. Qui ci interessa verificare che esse costituiscono un insieme di condizioni sufficiente; e lo facciamo applicando la condizione espressa dal teorema R4.2.4. Poiché non sappiamo quale dei tre numeri a_0, b_0, c_0 è maggiore, dobbiamo controllare che sia $c_0 < a_0 + b_0$, $a_0 < b_0 + c_0$ e $b_0 < a_0 + c_0$.

Dalle relazioni (2), si ha che $b = \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\beta_0)}{\mathbf{sin}(\alpha_0)}$ e $c = \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\gamma_0)}{\mathbf{sin}(\alpha_0)}$.

Per la (1), ricordando la (3) del teorema R3.2.10 e per il teorema R3.2.9,

$$\mathbf{sin}(\gamma_0) = \mathbf{sin}(\alpha_0 + \beta_0) = \mathbf{sin}(\alpha_0)\mathbf{cos}(\beta_0) + \mathbf{cos}(\alpha_0)\mathbf{sin}(\beta_0).$$

Dunque,

$$c = \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\gamma_0)}{\mathbf{sin}(\alpha_0)} = \frac{a \cdot (\mathbf{sin}(\alpha_0)\mathbf{cos}(\beta_0) + \mathbf{cos}(\alpha_0)\mathbf{sin}(\beta_0))}{\mathbf{sin}(\alpha_0)} = a \cdot \mathbf{cos}(\beta_0) + b \cdot \mathbf{cos}(\alpha_0) < a + b.$$

Osserviamo poi che per il teorema R3.4.4 si ha

$$\mathbf{sin}(\alpha_0) < \mathbf{sin}(\beta_0) + \mathbf{sin}(\alpha_0 + \beta_0)$$

ossia (moltiplicando ambo i membri per $\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha_0)}$ e ricordando che $\mathbf{sin}(\alpha_0 + \beta_0) = \mathbf{sin}(\gamma_0)$)

$$a < \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\beta_0)}{\mathbf{sin}(\alpha_0)} + \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\gamma_0)}{\mathbf{sin}(\alpha_0)} = b + c.$$

Analogamente, per il teorema R3.4.4 si ha

$$\mathbf{sin}(\beta_0) < \mathbf{sin}(\alpha_0) + \mathbf{sin}(\alpha_0 + \beta_0)$$

ossia (moltiplicando ambo i membri per $\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha_0)}$ e ricordando che $\mathbf{sin}(\alpha_0 + \beta_0) = \mathbf{sin}(\gamma_0)$)

$$b = \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\beta_0)}{\mathbf{sin}(\alpha_0)} < a + \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\gamma_0)}{\mathbf{sin}(\alpha_0)} = a + c.$$

R4.3 - Caso 1: noti i tre lati.

Siano noti a, b e c; supponiamo, per fissare le idee, che sia $a \geq b \geq c$. Per il teorema R4.2.4, se $a \geq b + c$ il triangolo cercato non esiste: sia dunque $a < b + c$.

Col teorema del coseno, determiniamo in primo luogo l'angolo opposto al lato maggiore (nel nostro caso, α). Dalla relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \mathbf{cos}(\alpha)$$

si ricava che $\mathbf{cos}(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Notiamo che il numero $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ è strettamente compreso fra -1 e 1: dalla relazione $a < b+c$, nella quale ambo i membri sono positivi, segue infatti che $a^2 < b^2+c^2+2bc$ e dunque che

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > -1;$$

mentre dalla relazione $a > b-c$, nella quale ambo i membri sono non negativi (si ricordi che $a \geq b \geq c$), segue che $a^2 > b^2+c^2-2bc$ e dunque che

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} < 1.$$

Per il teorema R3.2.6 e la (5) del teorema R3.2.10, esiste esattamente un angolo convesso α il cui coseno è

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Il teorema dei seni permette ora di determinare un secondo angolo, ad esempio β: dalla relazione

$$\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{b}{\mathbf{sin}(\beta)}$$

si ricava che

$$\mathbf{sin}(\beta) = \frac{b \cdot \mathbf{sin}(\alpha)}{a}.$$

Poiché β ha ampiezza minore di α (essendo il lato b, opposto a β, minore del lato a, opposto ad α), e poiché in un triangolo c'è al più un angolo ottuso, la conoscenza di $\mathbf{sin}(\beta)$ permette di determinare β.

Noti α e β, si ricava infine γ mediante il teorema R4.2.1.

Discussione — Se i lati inizialmente noti non verificano la condizione espressa dal teorema R4.2.4, il problema non ha soluzione. Se invece i lati inizialmente noti verificano la condizione espressa dal teorema R4.2.4, il problema ha esattamente una soluzione: quella univocamente determinata mediante il procedimento descritto. Si noti che un diverso procedimento potrebbe individuare più possibilità per gli elementi incogniti, fra le quali bisognerebbe trovare quella giusta mediante il teorema R4.2.5; si veda l'esempio R4.7.1.

R4.4 - Caso 2: noti due angoli e un lato.

Siano noti il lato a e due angoli; se la somma dei due angoli noti è un angolo convesso, il teorema R4.2.1 permette di trovare immediatamente il terzo angolo.

I lati incogniti si trovano applicando il teorema dei seni: dalla relazione $\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{b}{\mathbf{sin}(\beta)}$ si ricava che $b = \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\beta)}{\mathbf{sin}(\alpha)}$; e dalla relazione $\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{c}{\mathbf{sin}(\gamma)}$ si ricava che $c = \frac{a \cdot \mathbf{sin}(\gamma)}{\mathbf{sin}(\alpha)}$.

Discussione – Se la somma dei due angoli inizialmente noti non è un angolo convesso, il problema non ha soluzione (per il teorema R4.2.1). Se invece la somma dei due angoli inizialmente noti è un angolo convesso, il procedimento descritto permette di trovare esattamente una soluzione; l'esistenza di un triangolo con gli elementi così trovati è garantita dal teorema R4.2.5.

R4.5 - Caso 3: noti due lati e l'angolo "compreso".

Mediante il teorema del coseno si trova il terzo lato, e siamo ricondotti al caso 1.

Discussione – Dimostriamo che in questo caso il problema ha esattamente una soluzione, controllando che è verificata la condizione espressa dal teorema R4.2.4. Siano a, b i lati noti e γ l'angolo noto; supponiamo, per fissare le idee, $a \geq b$.
Poiché $\mathbf{cos}(\gamma) \geq -1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \mathbf{cos}(\gamma)} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$;
poiché $\mathbf{cos}(\gamma) \leq 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \mathbf{cos}(\gamma)} \geq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = a - b$
ossia $a \leq b + c$.
Qualunque sia il maggiore fra a e c, è quindi verificata la condizione espressa dal teorema R4.2.4.

R4.6 - Caso 4: noti due lati e l'angolo opposto a uno di essi.

Supponiamo, per fissare le idee, che siano noti i lati a e b e l'angolo α. In primo luogo si cerca di ricavare l'angolo β mediante il teorema dei seni.

Dalla relazione $\dfrac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \dfrac{b}{\mathbf{sin}(\beta)}$ si ricava che deve essere $\mathbf{sin}(\beta) = \dfrac{b \cdot \mathbf{sin}(\alpha)}{a}$.

Se $\dfrac{b \cdot \mathbf{sin}(\alpha)}{a} > 1$ (ossia se $a < b \cdot \mathbf{sin}(\alpha)$) non è possibile ricavare β; ciò significa che non esiste alcun triangolo verificante le condizioni assegnate.

Se invece $\dfrac{b \cdot \mathbf{sin}(\alpha)}{a} \leq 1$, esistono in generale due angoli β_1, β_2 (uno acuto, l'altro ottuso) il cui seno è $\dfrac{b \cdot \mathbf{sin}(\alpha)}{a}$. In corrispondenza, si trovano due valori γ_1, γ_2 per il terzo angolo (se $\alpha + \beta_1$ e $\alpha + \beta_2$ sono entrambi minori di un angolo piatto).

Infine, il lato c si ricava ancora col teorema dei seni: $c_1 = \dfrac{a \cdot \mathbf{sin}(\gamma_1)}{\mathbf{sin}(\alpha)}$; $c_2 = \dfrac{a \cdot \mathbf{sin}(\gamma_2)}{\mathbf{sin}(\alpha)}$.

Discussione – Se $a < b \cdot \mathbf{sin}(\alpha)$, si è già osservato che il problema non ha soluzione. Se invece $a \geq b \cdot \mathbf{sin}(\alpha)$, il procedimento descritto permette di trovare una o due soluzioni; l'esistenza di triangoli con gli elementi così trovati è garantita dal teorema R4.2.5.

R4.7 - Esempi.

Proponiamo alcuni esempi di “risoluzione di triangoli” in applicazione degli algoritmi sopra riportati. Gli angoli vengono individuati mediante la loro ampiezza in radianti.

Esempio R4.7.1

Siano dati: $a := 1; \quad b := \sqrt{3}; \quad c := 2.$

Determiniamo, applicando il teorema del coseno, l’angolo γ (opposto al lato maggiore, c). Dalla relazione

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \mathbf{cos}(\gamma)$$

che nel nostro caso diventa $4 = 1 + 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathbf{cos}(\gamma)$

si ricava che $0 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathbf{cos}(\gamma)$ da cui $\mathbf{cos}(\gamma) = 0$ ossia $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Ricaviamo ora α applicando il teorema dei seni. La relazione

$$\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{c}{\mathbf{sin}(\gamma)}$$

diventa nel nostro caso $$\frac{1}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{2}{1}$$

ossia $\mathbf{sin}(\alpha) = \frac{1}{2}$

e poiché α è certamente acuto (l’unico eventuale angolo ottuso in un triangolo è quello opposto al lato maggiore!) si ottiene che $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e infine $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Vediamo come una impostazione diversa dell’algoritmo risolutivo potrebbe creare qualche complicazione. Applichiamo all’inizio il teorema del coseno per ricavare, anziché l’angolo γ, l’angolo α. Dalla relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \mathbf{cos}(\alpha)$$

che nel nostro caso diventa

$$1 = 3 + 4 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathbf{cos}(\alpha)$$

otteniamo che $\mathbf{cos}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e dunque $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Applicando poi il teorema dei seni, dalla relazione

$$\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{b}{\mathbf{sin}(\beta)}$$

che nel nostro caso diventa $$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\mathbf{sin}(\beta)}$$

otteniamo che $$\mathbf{sin}(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e dunque $\beta = \frac{\pi}{3}$ oppure $\beta = \frac{2\pi}{3}$.

Ora, non è immediato stabilire quale di questi due valori sia da scartare: infatti entrambi sono maggiori di α (come deve essere, perché $b > a$) e ciascuno di essi, sommato ad α, dà come risultato un angolo convesso. Ricavando per primo l’angolo maggiore si evita questo imbarazzo, dal quale però si può uscire facilmente: infatti se fosse $\beta = \frac{2\pi}{3}$ sarebbe $\gamma = \frac{\pi}{6} = \alpha$, mentre sappiamo che $c > a$; dunque l’unica soluzione accettabile è: $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Esempio R4.7.2

Siano dati: $a := 1; \quad \alpha := \frac{\pi}{4}; \quad \beta := \frac{\pi}{12}.$

Per il teorema R4.2.1, si trova subito che $\gamma = \frac{2\pi}{3}$. Per trovare b e c basta applicare il teorema dei seni. Dalla relazione $\frac{a}{\textbf{sin}(\alpha)} = \frac{b}{\textbf{sin}(\beta)}$

cioè, nel nostro caso,

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

si ricava che

$$b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \; ;$$

mentre dalla relazione $\frac{a}{\textbf{sin}(\alpha)} = \frac{c}{\textbf{sin}(\gamma)}$

cioè, nel nostro caso, $\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

si ricava che $c = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Esempio R4.7.3

Siano dati: $a := \sqrt{6}; \quad b := \sqrt{3} - 1; \quad \gamma := \frac{\pi}{4}.$

Si ricava in primo luogo c applicando il teorema del coseno. Dalla relazione

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \textbf{cos}(\gamma)$$

che nel nostro caso diventa

$$c^2 = 6 + (3 + 1 - 2 \cdot \sqrt{3}) - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

si trova subito che $c = 2$. Applichiamo ancora il teorema del coseno per ricavare α (cioè, l'angolo opposto al lato maggiore). Dalla relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \textbf{cos}(\alpha)$$

che nel nostro caso diventa

$$6 = (3 + 1 - 2 \cdot \sqrt{3}) + 4 - 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot 2 \cdot \textbf{cos}(\alpha)$$

si ottiene che

$$\textbf{cos}(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

e quindi che $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Infine, per il teorema R4.2.1, $\beta = \frac{\pi}{12}$.

Vediamo perché conviene ricavare α mediante il teorema del coseno. L'alternativa, trovato c come sopra, sarebbe applicare il teorema dei seni, e precisamente la relazione $\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{c}{\mathbf{sin}(\gamma)}$ che, nel nostro caso, è $\frac{\sqrt{6}}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Da questa si ottiene che $\mathbf{sin}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e dunque $\alpha = \frac{\pi}{3}$ oppure $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Ora, non è immediato stabilire quale di questi due valori sia da scartare: infatti entrambi sono maggiori di γ (come deve essere, perché $a > c$) e ciascuno di essi, sommato a γ, dà come risultato un angolo convesso. Ricavando α col teorema del coseno si evita questo imbarazzo, dal quale però si può uscire facilmente: infatti se fosse $\alpha = \frac{\pi}{3}$ sarebbe $\beta = \frac{5\pi}{12} > \alpha$, mentre sappiamo che $b < a$; dunque l'unica soluzione accettabile è: $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{12}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Esempio R4.7.4

Siano dati: $a := 2$; $b := 3$; $\alpha := \frac{\pi}{4}$.
Cerchiamo di ricavare l'angolo β applicando il teorema dei seni, precisamente usando la relazione $\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{b}{\mathbf{sin}(\beta)}$ che nel nostro caso diventa $\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{\mathbf{sin}(\beta)}$.

Si ricava che deve essere $\mathbf{sin}(\beta) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$.
Ma $\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} > 1$ (per convincersene si elevino al quadrato ambo i membri, che sappiamo essere positivi!); ciò significa che non esiste alcun triangolo verificante le condizioni assegnate.

Esempio R4.7.5

Siano dati: $a := 2$; $b := \sqrt{2}$; $\alpha := \frac{\pi}{4}$.
Cerchiamo di ricavare l'angolo β applicando il teorema dei seni, precisamente usando la relazione $\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{b}{\mathbf{sin}(\beta)}$ che nel nostro caso è $\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\mathbf{sin}(\beta)}$.

Si ricava che deve essere $\mathbf{sin}(\beta) = \frac{1}{2}$ e dunque $\beta = \frac{\pi}{6}$ oppure $\beta = \frac{5\pi}{6}$.
Non può essere però $\beta = \frac{5\pi}{6}$, perché $\alpha + \beta$ sarebbe un angolo concavo ($\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{13\pi}{12} > \pi$).
Dunque necessariamente $\beta = \frac{\pi}{6}$, e $\gamma = \frac{7\pi}{12}$.

Si trova infine c ancora col teorema dei seni, ad esempio mediante la relazione $\frac{a}{\mathbf{sin}(\alpha)} = \frac{c}{\mathbf{sin}(\gamma)}$ che nel nostro caso è $\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$. Si ricava che

$$c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + 1 .$$

Esempio R4.7.6

Siano dati: $a := 2; \quad b := \sqrt{6}; \quad \alpha := \frac{\pi}{4}$.

Cerchiamo di ricavare l'angolo β applicando il teorema dei seni, precisamente usando la relazione

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

che nel nostro caso diventa $$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sin(\beta)}.$$

Si ricava che deve essere $$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e dunque

$$\beta = \frac{\pi}{3} \text{ oppure } \beta = \frac{2\pi}{3}.$$

Entrambi questi valori sono accettabili, perché $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} < \pi$ e $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12} < \pi$.

Ci sono dunque due soluzioni.

Se $\beta = \frac{\pi}{3}$, è $\gamma = \frac{5\pi}{12}$. Si trova c ancora col teorema dei seni, ad esempio mediante la relazione

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

che nel nostro caso è $$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}};$$

si ricava che $$c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + 1.$$

Se invece $\beta = \frac{2\pi}{3}$, è $\gamma = \frac{\pi}{12}$. Si trova ancora c col teorema dei seni, ad esempio mediante la relazione

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

che nel nostro caso è $$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}};$$

si ricava che $$c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - 1.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Barlotti
Appunti di MATEMATICA per il corso di laurea triennale in Scienze Naturali
http://www.dmd.unifi.it/marcobar/Snat/Appunti.pdf
http://marcobar.outducks.org/Snat/Appunti.pdf

[2] G. Choquet
L'enseignement de la Géométrie
Hermann, Paris (1964)

[3] D. Hilbert
Fondamenti della Geometria
Feltrinelli, Milano (1970)